

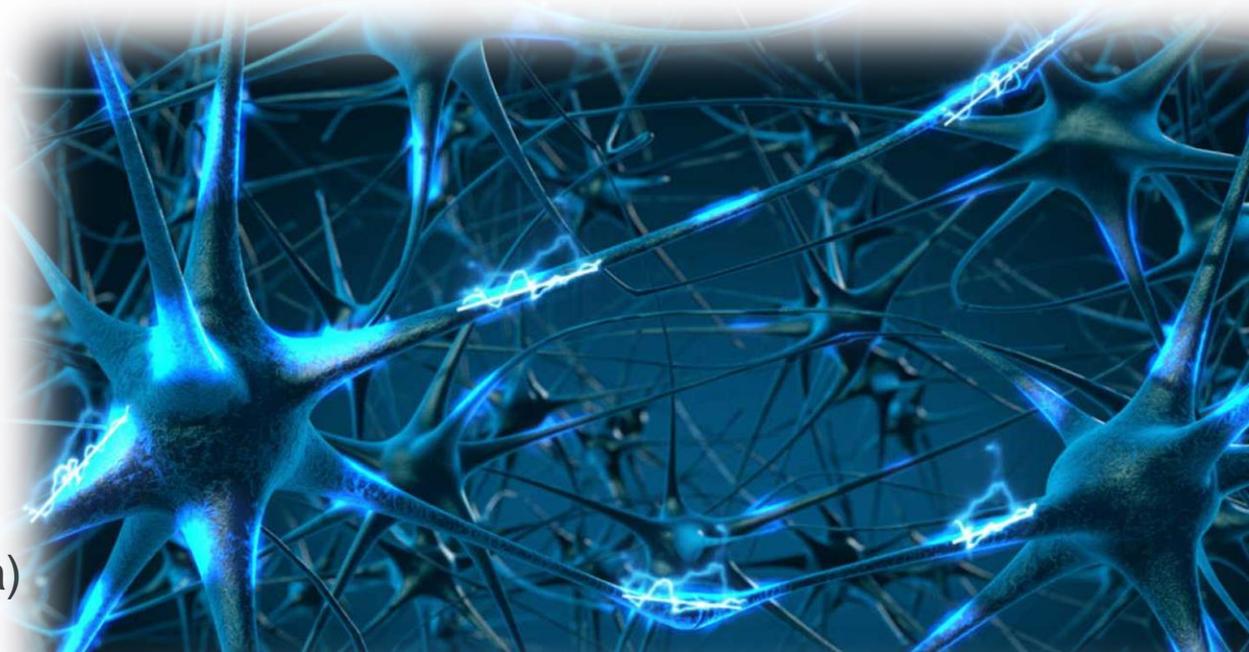
INTELLIGENZA ARTIFICIALE

ESERCITAZIONE ()*

Corsi di Laurea in Informatica, Ing. Gestionale, Ing. Informatica,
Ing. di Internet
(a.a. 2024-2025)

Roberto Basili

(*) alcune *slides* sono di
Maria Simi (Univ. Pisa)



Overview

- Esercizi sulla sintassi delle formule CPred
 - Albero di derivazione
- Formalizzazione della conoscenza in logica
 - Frasi in LN
 - Il mondo di Wumpus
- Conseguenza Logica
 - Dimostrazione tramite Tabelle di Verità per il CProp
 - Dimostrazione tramite Tableaux nel CPRed
 - Una ontologia

CALCOLO DELLE PROPOSIZIONI: RECAP

Sintassi

- La sintassi definisce quali sono le frasi legittime del linguaggio:

$formula \rightarrow formulaAtomica \mid formulaComplessa$

$formulaAtomica \rightarrow \mathbf{True} \mid \mathbf{False} \mid simbolo$

$simbolo \rightarrow \mathbf{P} \mid \mathbf{Q} \mid \mathbf{R} \mid \dots$

$formulaComplessa \rightarrow \neg formula$

$\mid (formula \wedge formula)$

$\mid (formula \vee formula)$

$\mid (formula \Rightarrow formula)$

$\mid (formula \Leftrightarrow formula)$

Sintassi: esempi

- $A, A \Rightarrow B, ((A \wedge B) \Rightarrow C)$

$formula \rightarrow formulaAtomica \mid formulaComplessa$
 $formulaAtomica \rightarrow \mathbf{True} \mid \mathbf{False} \mid simbolo$
 $simbolo \rightarrow \mathbf{P} \mid \mathbf{Q} \mid \mathbf{R} \mid \dots$
 $formulaComplessa \rightarrow \neg formula$
| $(formula \wedge formula)$
| $(formula \vee formula)$
| $(formula \Rightarrow formula)$
| $(formula \Leftrightarrow formula)$

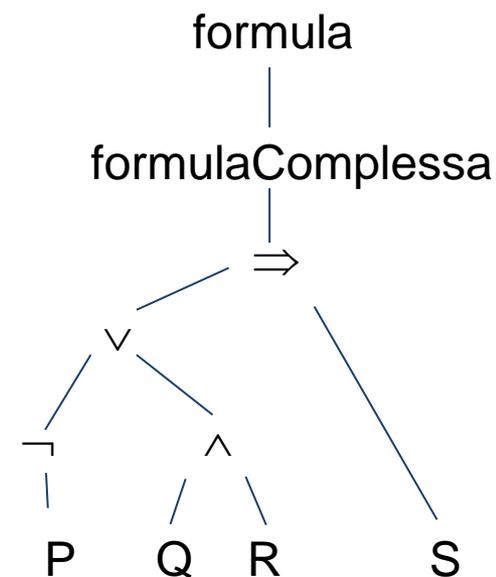
- Possiamo omettere le parentesi assumendo questa precedenza tra gli operatori:

$\neg > \wedge > \vee > \Rightarrow, \Leftrightarrow$

- $\neg P \vee Q \wedge R \Rightarrow S$

è la stessa formula di

$(((\neg P) \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow S)$



Semantica e mondi possibili (modelli)

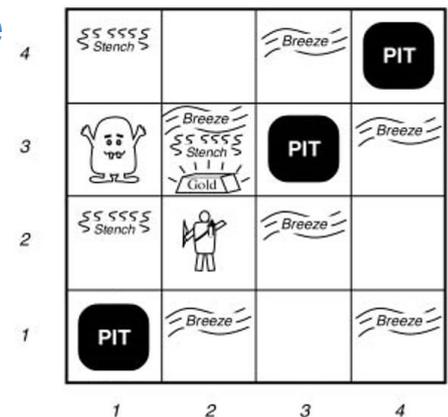
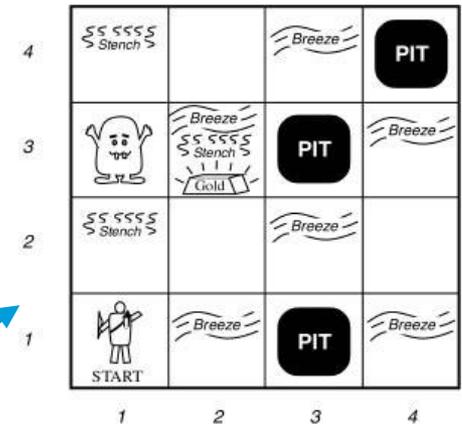
- La semantica ha a che fare col significato delle frasi: definisce se un enunciato è vero o falso rispetto ad una *interpretazione* (in un mondo possibile)
- Una interpretazione definisce un valore di verità per tutti i simboli proposizionali.
- Esempio:

- $\{P_{3,1} \text{ vero}, P_{1,2} \text{ falso}, W_{1,3} \text{ vero}\}$

- $P_{3,1} \Rightarrow W_{1,3} \vee P_{1,2}$ è vera in questa interpretazione

- $\{P_{3,1} \text{ falso}, P_{1,1} \text{ vero}, W_{1,3} \text{ vero}\}$

- Un *modello* è una interpretazione *che rende vera* una formula o un insieme di formule



Semantica composizionale

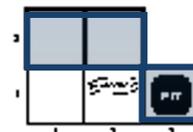
- Il significato di una frase è determinato dal significato dei suoi componenti, a partire dalle frasi atomiche (i simboli proposizionali)
 - *True* sempre vero; *False* sempre falso
 - $P \wedge Q$, vero se P e Q sono veri
 - $P \vee Q$, vero se P oppure Q , o entrambi, sono veri
 - $\neg P$, vero se P è falso
 - $P \Rightarrow Q$, vero se P è falso oppure Q è vero
 - $P \Leftrightarrow Q$, vero se entrambi veri o entrambi falsi

Conseguenza logica

- Una formula A è *conseguenza logica* di un insieme di formule KB se e solo se in ogni modello di KB , anche A è vera ($KB \models A$)
- Indicando con $M(\alpha)$ l'insieme delle interpretazioni che rendono α vera, cioè i **modelli** di α , e con $M(KB)$ i modelli di un insieme di formule KB ...
$$KB \models \alpha \quad \text{sse} \quad M(KB) \subseteq M(\alpha)$$

Esempio dal mondo del Wumpus

- $KB = \{B_{2,1}, \neg B_{1,1}, + \textit{regole del WW}\}$



Vogliamo stabilire l'assenza di pozzi in $[1,2]$ e in

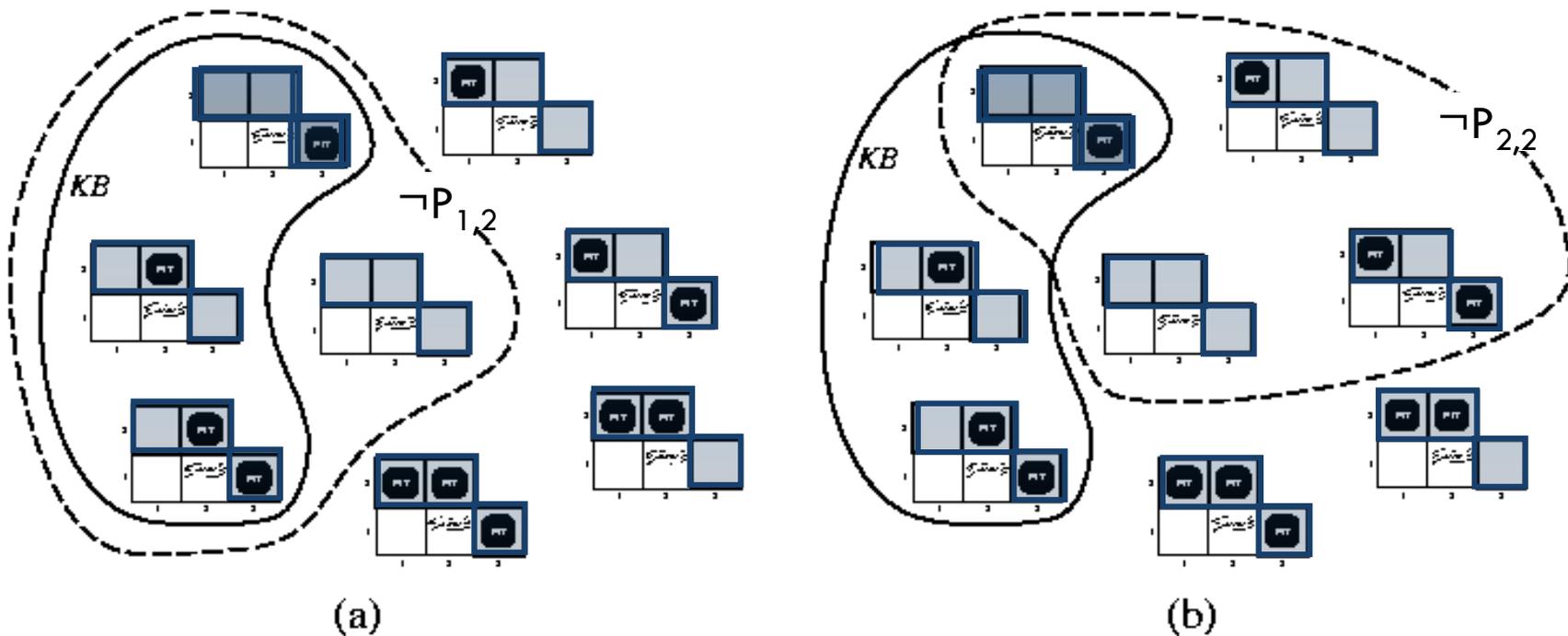
$[2,2]$ $KB \models \neg P_{1,2}?$

$KB \models \neg P_{2,2}?$

- Ci sono otto possibili interpretazioni o mondi considerando solo l'esistenza di pozzi nelle 3 caselle

$P_{1,2}, P_{2,2}$ e $P_{3,1}$

Conseguenza logica e mondi possibili



$$KB = \{B_{2,1}, \neg B_{1,1} + \text{regole del WW}\}$$

$$KB \models \neg P_{1,2} \quad \text{poichè } M(KB) \subseteq M(\neg P_{1,2})$$

$$KB \not\models \neg P_{2,2} \quad \text{poichè } M(KB) \not\subseteq M(\neg P_{2,2})$$

CALCOLO DEI PREDICATI

Obiettivo: modellare il mondo (es. blocchi)

Ci interessano i blocchi e alcune loro relazioni spaziali

Dominio: {a, b, c, d, e} ← *blocchi veri!* X

Le funzioni: si individuano le funzioni rilevanti che servono anch'esse per identificare oggetti.

Es. *Hat* la funzione unaria che dato un blocco identifica il blocco che ci sta sopra; $Hat(b)=a$

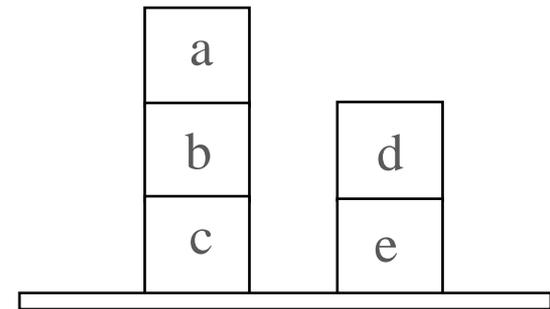
Le relazioni: si individuano le relazioni interessanti. Es.

On = {<a, b>, <b, c>, <d, e>}

Clear = {a, d}

Table = {c, e}

Block = {a, b, c, d, e}



Concettualizzazione

<D,F,P>

<{a, b, c, d, e}, {*Hat*}, {*On*, *Clear*, *Table*, *Block*}>

- Le concettualizzazioni possibili sono infinite: un aspetto importante è il livello di astrazione *giusto* per gli scopi della rappresentazione.
Es. se fosse rilevante il colore o la grandezza dei blocchi dovremmo introdurre predicati anche per questi aspetti

La logica dei predicati del prim'ordine (FOL)

- Il linguaggio: vocabolario

- *Connettivo* → \wedge | \vee | \neg | \Rightarrow | \Leftrightarrow | \Leftarrow

- *Quantificatore* → \forall | \exists

- *Variabile* → x | y | ... a | s ... (lettere minuscole)

- *Costante* → Es. A | B | ... Mario | Pippo | 2 ...

- *Funzione* → Es. *Hat* | *Padre-di* | $+$ | $-$ | ...

(con *arità* ≥ 1) 1 1 2 2

- *Predicato* → Es. *On* | *Clear* | \geq | $<$...

(con *arità* ≥ 0) 2 1 2 2

Il linguaggio: le formule

La sintassi delle formule:

Formula-atomica \rightarrow *True* | *False* |

Termine = Termine |

Predicato (Termine, ...)

(un numero di termini pari alla arit  del predicato)

Formula \rightarrow *Formula-atomica* |

Formula *Connettivo* *Formula* |

Quantificatore *Variabile* *Formula* |

\neg *Formula* | (*Formula*)

Il linguaggio: formule ben formate

Esempi di formule atomiche:

Ama(Giorgio, Lucia)

$+(2, 3) = 5$

On(A, B)

$x = 5$

Madre-di(Luigi) = Silvana

Amico(*Padre-di*(Giorgio), *Padre-di*(Elena))

Esempi di formule complesse:

On(A, B) \wedge *On*(B, C)

(*congiunzione*)

Studia(Paolo) \Rightarrow *Promosso*(Paolo)

(*implicazione materiale*)

Il linguaggio: quantificatori

- Quantificatore universale

- $\forall x \text{ Ama}(x, \text{Gelato})$

- Quantificatore esistenziale

- $\exists x \text{ Mela}(x) \wedge \text{Rossa}(x)$

- Nota: l'ordine dei quantificatori è importante:

- $\forall x (\exists y \text{ Ama}(x, y))$ *Tutti amano qualcuno*

- $\exists y (\forall x \text{ Ama}(x, y))$ *Esiste qualcuno amato da tutti*

- Ambito dei quantificatori:

ambito di y

$$\forall x (\exists y \text{ Ama}(x, y))$$

ambito di x

$$\forall x (\exists y \text{ Ama}(x, y))$$

Il linguaggio: precedenza tra gli operatori

Precedenza tra gli operatori logici:

$= > \neg > \wedge > \vee > \Rightarrow, \Leftrightarrow > \forall, \exists$

Es. $\forall x \text{ Persona}(x) \Rightarrow \text{Sesso}(x)=M \vee \text{Sesso}(x)=F$

è da interpretare come ...

$\forall x \text{ Persona}(x) \Rightarrow (\text{Sesso}(x)=M) \vee (\text{Sesso}(x)=F)$

$\forall x \text{ Persona}(x) \Rightarrow ((\text{Sesso}(x)=M) \vee (\text{Sesso}(x)=F))$

$\forall x(\text{Persona}(x) \Rightarrow ((\text{Sesso}(x)=M) \vee (\text{Sesso}(x)=F)))$

Interpretazione

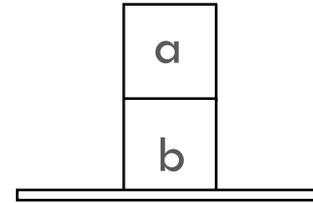
- Una interpretazione I stabilisce una corrispondenza precisa tra elementi atomici del linguaggio ed elementi della concettualizzazione.
- I interpreta:
 - i simboli di costante come elementi del dominio D
 - i simboli di funzione come funzioni da n -uple di D in D , ad es. $f:D^n \rightarrow D$
 - i simboli di predicato come insiemi di n -uple, ad es. $P \subseteq D^n$

Semantica: un esempio

$On(A, B)$

$Clear(A)$

$Table(B)$



Due interpretazioni possibili:

... quella intesa I

$I_c(A)=a$

$I_c(B)=b$

$I_p(On/2)=\{<a, b>\}$ s.i. D^2

$I(Clear)=\{a\}$

$I(Table)=\{b\}$

... un'altra possibile I'

$I'_c(A)=a$

$I'_c(B)=b$

$I'_p(On)=\{<b, a>\}$

$I'_p(Clear)=\{b\}$

$I'_p(Table)=\{a\}$

$ON(B, A)$ è vera? In I o in I' ?

ESERCIZI PROPOSTI

Sintassi nel Cprop

<i>formula</i>	\rightarrow	<i>formulaAtomica</i> <i>formulaComplessa</i>
<i>formulaAtomica</i>	\rightarrow	True False <i>simbolo</i>
<i>simbolo</i>	\rightarrow	P Q R ...
<i>formulaComplessa</i>	\rightarrow	\neg <i>formula</i>
		(<i>formula</i> \wedge <i>formula</i>)
		(<i>formula</i> \vee <i>formula</i>)
		(<i>formula</i> \Rightarrow <i>formula</i>)
		(<i>formula</i> \Leftrightarrow <i>formula</i>)

- Determinare l'albero di derivazione delle seguenti formule per il CProp
 - $(P \Rightarrow Q) \vee \neg P$
 - $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
 - $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
 - $(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg((Q \wedge A) \Rightarrow B) \wedge ((P \wedge A) \Rightarrow B)$

Sintassi nel Cpred

<i>Formula-atomica</i> → <i>True</i> <i>False</i>
<i>Termine = Termine</i>
<i>Predicato (Termine, ...)</i>
(un numero di termini pari alla arità del predicato)
<i>Formula</i> → <i>Formula-atomica</i>
<i>Formula</i> <i>Connettivo</i> <i>Formula</i>
<i>Quantificatore</i> <i>Variabile</i> <i>Formula</i>
<i>¬ Formula</i> (<i>Formula</i>)

- Determinare l'albero di derivazione delle seguenti formule per il CPred
 - $\exists y (\forall x Q(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists y (Q(x,y))$
 - $\neg \exists x (P(x) \wedge \forall y Q(x,y)) \wedge \neg \exists x (P(x) \wedge R(x))$

Formalizzazione in Logica: LN

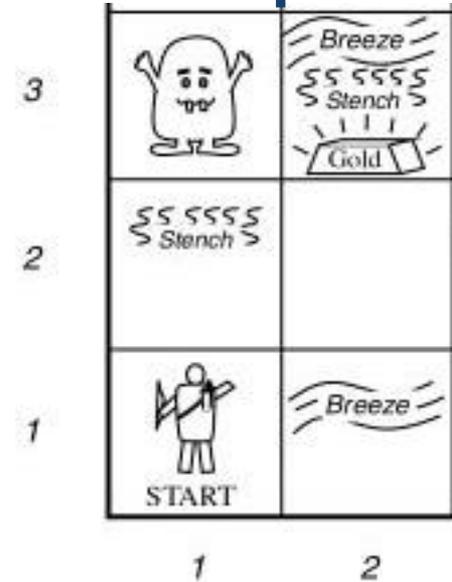
- Scrivere le versioni in CProp ed in CPred delle seguenti frasi:
 - Mario mangia la pizza
 - I libri di scuola sono tutti con copertina rigida
 - Il libro di Mario è un libro di scuola
 - I libri di storia sono molto costosi
 - Mario mangia la pizza se Maria la serve in tavola

Formalizzazione in Logica: LN

- *Mario mangia la pizza*
 - Cprop: p, CPred: $\forall x \text{ Pizza}(x) \wedge \text{Mangia}(m,x)$
- *I libri di scuola sono tutti con copertina rigida*
 - CProp: none,
 - Cpred: $\forall x \text{ Libro}(x) \wedge \text{Materia}(x, \text{scuola}) \Rightarrow \text{Copertina}(x, \text{rigida})$
- *Il libro di Mario è un libro di scuola*
 - Cprop: none
 - Cpred: $\exists x \text{ Libro}(x) \wedge \text{Possiede}(m,x) \wedge \text{Materia}(x, \text{scuola})$
- *I libri di storia sono molto costosi*
- *Mario mangia la pizza se Maria la serve in tavola*
 - CProp: none,
 - Cpred: $\forall x \text{ Pizza}(x) \wedge \text{Serve}(Ma, x) \Rightarrow \text{Mangia}(M, x)$

Formalizzazione in Logica: Wumpus

- Dato il mondo descritto qui a destra, usare la sintassi Cprop per
 - Determinare le formule che dichiarano l'esistenza di tutte le entità del mondo
 - Determinare le formule che stabiliscono le proprietà utili delle entità del mondo
 - Determinare lo stato del mondo in formule
- Determinare la corrispondente versione in CPred



CONSEGUENZA LOGICA

Interpretazione ed implicazione

Roberto dice «*Vengo a prenderti al supermercato, se piove*».

In quali di questi casi, che corrispondono a interpretazioni delle proposizioni elementari, Roberto ha detto una bugia?

- (a) *Piove, e Roberto va al supermercato*
- (b) *Piove, e Roberto non va al supermercato*
- (c) *Non piove, e Roberto va lo stesso al supermercato*
- (d) *Non piove, e Roberto non va al supermercato*

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$
F	F	F	F	V
F	V	F	V	V
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

Inferenza per la Conseguenza Logica

- Dimostrare (o confutare) tramite Tabelle di Verità per il CProp le seguenti formule
 - a) $\{P, P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)\} \models Q$
 - b) $\{P \wedge Q, (Q \wedge A) \Rightarrow B, (P \wedge A) \Rightarrow B\} \models B$
 - c) $\{\neg P \vee Q, Q, \neg Q \vee \neg P\} \models \neg P$
 - d) $\{\} \models ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$
- Come si definisce una formula come quella in d)?

Forma normale congiuntiva (CNF)

- Trasformare in CNF la formula seguente

$$\neg (\neg (P \vee \neg Q) \Rightarrow \neg (Q \vee (R \wedge (S \Rightarrow P))))$$

Equivalenze logiche

Two sentences are **logically equivalent** iff true in same models:

$\alpha \equiv \beta$ if and only if $\alpha \models \beta$ and $\beta \models \alpha$

$$(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha) \quad \text{commutativity of } \wedge$$

$$(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha) \quad \text{commutativity of } \vee$$

$$((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \quad \text{associativity of } \wedge$$

$$((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \quad \text{associativity of } \vee$$

$$\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha \quad \text{double-negation elimination}$$

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha) \quad \text{contraposition}$$

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \quad \text{implication elimination}$$

$$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)) \quad \text{biconditional elimination}$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta) \quad \text{De Morgan}$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \quad \text{De Morgan}$$

$$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)) \quad \text{distributivity of } \wedge \text{ over } \vee$$

$$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)) \quad \text{distributivity of } \vee \text{ over } \wedge$$

CNF: risposta

$$\neg(\neg(P \vee \neg Q) \Rightarrow \neg(Q \vee (R \wedge (S \Rightarrow P))))$$

$$\Rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee \neg Q) \vee \neg(Q \vee (R \wedge (\neg S \vee P))))$$

$$\Rightarrow \neg(P \vee \neg Q) \wedge \neg\neg(Q \vee (R \wedge (\neg S \vee P)))$$

$$\Rightarrow \neg(P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee (R \wedge (\neg S \vee P)))$$

$$\Rightarrow (\neg P \wedge \neg\neg Q) \wedge (Q \vee (R \wedge (\neg S \vee P)))$$

$$\Rightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge (Q \vee (R \wedge (\neg S \vee P)))$$

$$\Rightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge ((Q \vee R) \wedge (Q \vee (\neg S \vee P)))$$

$$\Rightarrow \neg P \wedge Q \wedge (Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg S \vee P)$$

Inferenza per la Conseguenza Logica

- Dato un dominio $D=\{a,b\}$, e la semantica dei due predicati
 - $I(P/1) = \{a,b\}$
 - $I(Q/2)=\{<a,b>, <b,a>\}$
- Dimostrare che è **falsa** la formula:

$$\exists x (P(x) \wedge \forall y Q(x,y))$$

Inferenza per la Conseguenza Logica

- Dimostrare tramite la risoluzione che
- che la formula: $\neg \exists x (P(x) \wedge R(x))$
- È conseguenza logica di una base di conoscenza che contiene le formule
 - $\neg \exists x (P(x) \wedge \forall y Q(x,y))$
 - $\neg \exists x (R(x) \wedge \exists y \neg Q(x,y))$

Inferenza per la Conseguenza Logica

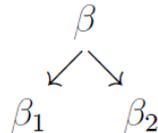
- Dimostrazione (o confutare) (tramite Tableaux o mediante la risoluzione) nel CPred le seguenti formule sono valide:
 - $\exists y (\forall x Q(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists y (Q(x,y))$
 - $\forall x \exists y (Q(x,y)) \Rightarrow \exists y (\forall x Q(x,y))$

Mediante i Tableaux ...

- $\exists y (\forall x Q(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists y (Q(x,y))$

- Formule e connettivi

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \quad \frac{\alpha}{\alpha_2}$$



α	α_1	α_2
$X \wedge Y$	X	Y
$\neg(X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg(X \rightarrow Y)$	X	$\neg Y$

β	β_1	β_2
$X \vee Y$	X	Y
$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$X \rightarrow Y$	$\neg X$	Y

- Quantificatori

UNIVERSALI

$$\frac{\gamma}{\gamma(a)}$$

dove a è
un parametro
qualunque

ESISTENZIALI

$$\frac{\delta}{\delta(a)}$$

dove a è
un parametro
mai usato prima

Come nel caso della logica proposizionale, diciamo che un ramo di un *tableau* è chiuso se sul ramo c'è sia una formula che la sua negata. Diciamo che un *tableau* è chiuso se tutti i suoi rami sono chiusi e diciamo che una formula \mathcal{F} è dimostrabile col metodo dei *tableaux* se partendo da $\neg\mathcal{F}$ e applicando le regole per le α , β , γ e δ formule riusciamo a ottenere un *tableau* chiuso.

...mediante i Tableaux ...

- $\exists y (\forall x Q(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists y (Q(x,y))$
- Neghiamo la formula:
 - $\neg(\exists y (\forall x Q(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists y (\neg Q(x,y)))$ ottenendo
 - $\exists y (\forall x Q(x,y)) \wedge \exists x (\forall y \neg Q(x,y))$ che è della forma

$$X1 \wedge X2$$

da cui con una α -formula

$$X1: \exists y (\forall x Q(x,y))$$

e

$$X2: \exists x (\forall y \neg Q(x,y))$$

da cui con due δ -formule

$$\forall x Q(x,a)$$

da cui con due γ -formule

$$\forall y \neg Q(b,y)$$

$$Q(b,a)$$

$$\neg Q(b,a)$$

per la arbitrarietà nella scelta di x

- cioè la inconsistenza del ramo del tableaux, e quindi della formula negata che dimostra quindi:

$$\{\} \models \exists y (\forall x Q(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists y (Q(x,y))$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_1}$$

$$\alpha_2$$

$$\beta$$

$$\swarrow \searrow$$

$$\beta_1 \quad \beta_2$$

UNIVERSALI

ESISTENZIALI

$$\frac{\gamma}{\gamma(a)}$$

dove a è
un parametro
qualsivoglia

$$\frac{\delta}{\delta(a)}$$

dove a è
un parametro
mai usato prima