INTELLIGENZA ARTIFICIALE

KR: CALCOLO DEI PREDICATI (*)

Corsi di Laurea in Informatica, Ing. Gestionale, Ing. Informatica, Ing. di Internet

(a.a. 2023-2024)

Roberto Basili

(*) alcune *slides* sono di
Maria Simi (Univ. Pisa)

Overview

- Logica dei Predicati (FOL): motivazioni
  - Concettualizzazione e Logica
- Sintassi e Semantica
  - Termini, Connettivi e Quantificatori
  - Interpretazione di una formula logica
  - Database Semantics

- Inferenza Logica nel Calcolo dei Predicati
  - Conseguenza Logica e Dimostrazione

- Formule ground e Interpretazione di Herbrand
- Risoluzione e Completezza
  - Unificazione
  - Algoritmi di Risoluzione
  - Introduzione alla Programmazione Logica

Il calcolo dei predicati per R.C.

- Nella logica dei predicati abbiamo assunzioni ontologiche più ricche: gli *oggetti*, *le proprietà* e le *relazioni*

- Si inizia con una *concettualizzazione*: si tratta di decidere quali sono le cose di cui si vuole parlare
  - *Gli oggetti*: un libro, un evento, una persona, un istante di tempo, un insieme, una funzione, un unicorno …
    - Gli oggetti possono essere identificati con simboli o relativamente ad altri oggetti, mediante *funzioni*: "*la madre di Pietro*"
    - L'insieme degli oggetti rilevanti costituiscono il *dominio del discorso.* Il dominio potrebbe essere infinito.
  - Le proprietà: "*la madre di Pietro è simpatica*"
  - Le relazioni tra gli oggetti: *"Pietro è amico di Paolo"*

Esempio: il mondo dei blocchi

Ci interessanno i blocchi e alcune loro relazioni spaziali

Dominio: {a, b, c, d, e} ← *blocchi veri!*

Le funzioni: si individuano le funzioni rilevanti che servono anch’esse per identificare oggetti.

Es. *Hat* la funzione unaria che dato un blocco identifica il blocco che ci sta sopra; *Hat*(b)=a

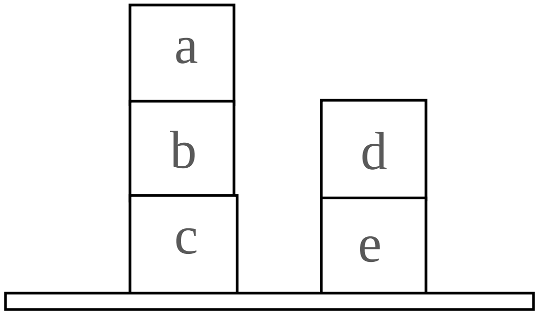
Le relazioni: si individuano le relazioni interessanti. Es.

On= {<a, b>, <b, c>, <d, e>}

Clear= {a, d}

Table= {c, e}

Block= {a, b, c, d, e}



Concettualizzazione

<{a, b, c, d, e}, {*Hat*}, {*On*, *Clear*, *Table*, *Block*}>

- Le concettualizzazioni possibili sono infinite: un aspetto importante è il livello di astrazione *giusto* per gli scopi della rappresentazione.

  Es. se fosse rilevante il colore o la grandezza dei blocchi dovremmo introdurre predicati anche per questi aspetti

La logica dei predicati del prim’ordine (FOL)

- Il linguaggio: vocabolario
  - *Connettivo* $\rightarrow \wedge \mid \vee \mid \neg \mid \Rightarrow \mid \Leftrightarrow \mid \Leftarrow$
  - *Quantificatore* $\rightarrow \forall \mid \exists$
  - *Variabile* $\rightarrow$ x | y | … a | s … (lettere minuscole)
  - *Costante* $\rightarrow$ Es. A | B | … Mario | Pippo | 2 …
  - *Funzione* $\rightarrow$ Es. *Hat* | *Padre-di* | + | - | …

    (con *arità* $\geq$ 1) 1 1 2 2
  - *Predicato* $\rightarrow$ Es. *On* | *Clear* | $\geq$ | $<$ …

    (con *arità* $\geq$ 0) 2 1 2 2

Il linguaggio: i termini

- La sintassi dei termini:
  $Termine \rightarrow Costante \mid Variabile \mid Funzione\ (Termine, \ldots)$
  (un numero di termini pari alla arità della funzione)

- Esempi di termini ben formati:

f(x, y)	+(2, 3)
Padre-di(Giovanni)	x, A, B, 2
Prezzo(Banane)	*Hat*(A)

Il linguaggio: le formule

La sintassi delle formule:

Formula-atomica $\rightarrow$ *True* | *False* |
Termine = *Termine* |
Predicato (*Termine*, …)
(un numero di termini pari alla arità del predicato)

Formula $\rightarrow$ *Formula-atomica* |
Formula Connettivo Formula |
Quantificatore Variabile Formula |
$\neg$ *Formula* | (*Formula*)

Il linguaggio: formule ben formate

Esempi di formule atomiche:

Ama(Giorgio, Lucia) $+(2, 3) = 5$

On(A, B) $x = 5$

Madre-di(Luigi) = Silvana

Amico(*Padre-di*(Giorgio), *Padre-di*(Elena))

Esempi di formule complesse:

On(A, B) $\wedge$ *On*(B, C) (*congiunzione*)

Studia(Paolo) $\Rightarrow$ *Promosso*(Paolo) (*implicazione materiale*)

Il linguaggio: quantificatori

- Quantificatore universale
  - $\forall x$ *Ama*(x, Gelato)
- Quantificatore esistenziale
  - $\exists x$ *Mela*(x) $\wedge$ *Rossa*(x)

- Nota: l'ordine dei quantificatori è importante:
  - $\forall x$ ($\exists y$ *Ama*(x, y)) *Tutti amano qualcuno*
  - $\exists y$ ($\forall x$ *Ama*(x, y)) *Esiste qualcuno amato da tutti*
- Ambito dei quantificatori:

ambito di y *ambito di x*

$\forall x$ ($\exists y$ *Ama*(x, y)) $\forall x$ ($\exists y$ *Ama*(x, y))

Formule *chiuse, aperte, ground*

- Di solito le variabili sono usate nell'ambito di quantificatori. In tal caso le *occorrenze* si dicono *legate*. Se non legate sono *libere*.

  $Mela(x) \Rightarrow Rossa(x)$ x è libera in entrambe le occ.

  $\forall x\ Mela(x) \Rightarrow Rossa(x)$ x è legata …

  $Mela(x) \Rightarrow \exists x\ Rossa(x)$ la 1a è libera, la 2a legata

- *Def*. *Formula chiusa*: una formula che non contiene occorrenze di variabili libere.

- Altrimenti è detta *aperta*.
- *Def. Formula ground*: una formula che non contiene variabili.

Il linguaggio: precedenza tra gli operatori

Precedenza tra gli operatori logici:

$= \; > \; \neg \; > \; \wedge \; > \; \vee \; > \; \Rightarrow, \Leftrightarrow \; > \; \forall, \exists$

Es. $\forall x\ \mathit{Persona}(x) \Rightarrow \mathit{Sesso}(x)=M \vee \mathrm{Sesso}(x)=F$

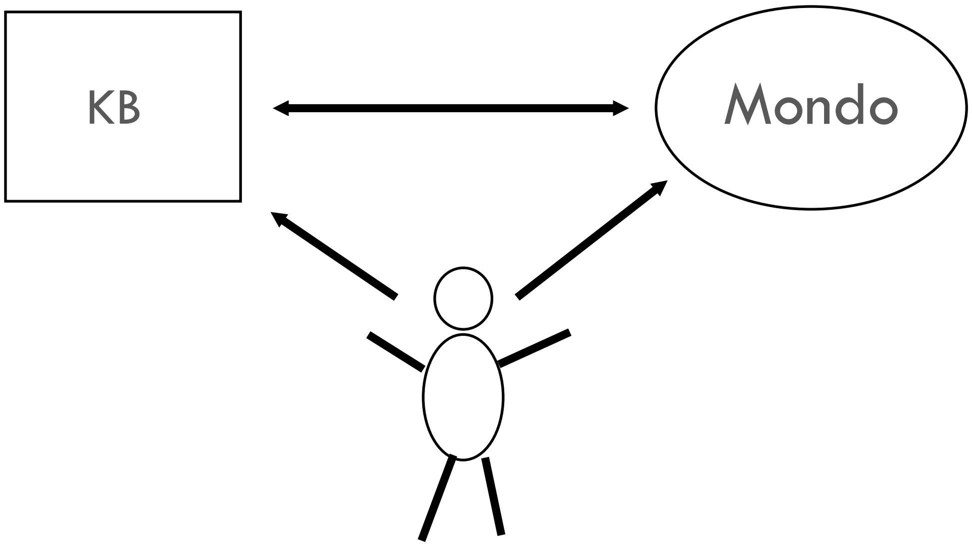
è da interpretare come …

$\forall x\ \mathit{Persona}(x) \Rightarrow (\mathit{Sesso}(x)=M) \vee (\mathit{Sesso}(x)=F)$

$\forall x\ \mathit{Persona}(x) \Rightarrow ((\mathit{Sesso}(x)=M)\vee(\mathit{Sesso}(x)=F))$

$\forall x(\mathit{Persona}(x) \Rightarrow ((\mathit{Sesso}(x)=M)\vee(\mathit{Sesso}(x)=F)))$

Semantica dichiarativa



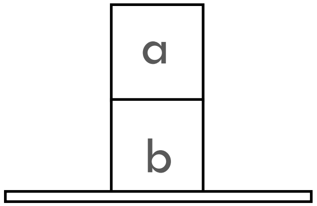
Consiste nello stabilire una corrispondenza tra:

- i termini del linguaggio e gli oggetti del mondo
- le formule chiuse e i valori di verità

Interpretazione

- Una interpretazione **I** stabilisce una corrispondenza precisa tra elementi atomici del linguaggio ed elementi della concettualizzazione.
- **I** interpreta:
  - i simboli di costante come elementi del dominio *D*
  - i simboli di funzione come funzioni da *n*-uple di *D* in *D*, ad es. $f{:}D^n \rightarrow D$
  - i simboli di predicato come insiemi di *n*-uple, ad es. $P \subseteq D^n$

Semantica: un esempio



On(A, B)

Clear(A)

Table(B)

Due interpretazioni possibili:

… quella intesa **I**

$\mathbf{I}_c(A)=a$

$\mathbf{I}_c(B)=b$

$\mathbf{I}_P(\mathit{On/2})=\{\langle a, b\rangle\}$ s.i. D^2

$\mathbf{I}\ (\mathit{Clear})=\{a\}$

$\mathbf{I}(\mathit{Table})=\{b\}$

… un'altra possibile **I'**

$\mathbf{I'}_c(A)=a$

$\mathbf{I'}_c(B)=b$

$\mathbf{I'}_P(\mathit{On})=\{\langle b, a\rangle\}$

$\mathbf{I'}_P(\mathit{Clear})=\{b\}$

$\mathbf{I'}_P(\mathit{Table})=\{a\}$

ON(B, A) è vera? In I o in I'?

Semantica composizionale

- Il significato di un termine o di una formula composta è determinato in funzione del significato dei suoi componenti:
  - es. *Sorella(Madre(Pietro))*

La formula $A \wedge B$ è vera in una certa interpretazione se entrambe A e B sono vere

- $\neg A$ è vera se A è falsa
- $A \vee B$ è vera se A è vera oppure B è vera (o entrambe)
- $A \Rightarrow B$ è vera se A è falsa oppure B è vera (come $\neg A \vee B$)

Semantica ($\forall$)

- $\forall x\, A(x)$ è vera se per ciascun elemento del dominio *A* è vera di quell'elemento
- Se il dominio è finito equivale a un grosso $\wedge$

  $\forall x\ Mortale(x)$

  $Mortale(Gino) \wedge Mortale(Pippo) \wedge \ldots$
- Tipicamente, siccome difficilmente una proprietà è universale, $\forall$ si usa quasi sempre insieme a $\Rightarrow$

  $\forall x\ Persona(x) \Rightarrow Mortale(x)$

Semantica ($\exists$)

- $\exists x\ A(x)$ è vera se esiste almeno un elemento del dominio per cui A è vera
- Se il dominio è finito equivale a un grosso $\vee$

  $\exists x\ Persona(x)$

  $Persona(Gino) \vee Persona(Pippo) \vee \ldots$
- Tipicamente $\exists$ si usa con $\wedge$

  $\exists x\ Persona(x) \wedge Speciale(x)$

  $\exists x\ Persona(x) \Rightarrow Speciale(x)$ troppo debole

Relazione tra ∀ ed ∃

$$\forall x\, \neg P(x) \equiv \neg \exists x\, P(x)$$

$$\neg \forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$$

$$\forall x\, P(x) \equiv \neg \exists x\, \neg P(x)$$

$$\neg \forall x\, \neg P(x) \equiv \exists x\, P(x)$$

$$\neg P \wedge \neg Q \equiv \neg (P \vee Q)$$

$$\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

$$P \wedge Q \equiv \neg (\neg P \vee \neg Q)$$

$$P \vee Q \equiv \neg (\neg P \wedge \neg Q)$$

Perché logica del *primo ordine*?

- Le variabili possono essere usate per denotare oggetti del dominio, non per denotare funzioni o predicati o formule.
- Funzioni e predicati possono essere oggetti del dominio; ma è così non possono essere usati al posto dei nomi di funzioni o predicati.

Es. $\exists f\ \forall x\ f(x)=x$ (esistenza dell'identità) NO

$\exists f.\ \textit{Funzione-Identità}(f)$ SI

$\forall p\ \ \textit{BuonaQualità}(p) \Rightarrow \textit{Ha}(\textit{Giorgio}, p)$ SI

$\forall p\ \ \textit{BuonaQualità}(p) \Rightarrow p(\textit{Giorgio})$ NO

- Il superamento di questa restrizione porta a linguaggi del second'ordine, o di ordine superiore.

Semantica standard e semantica ‘database’

- *Riccardo ha due fratelli: Giovanni e Goffredo*

  $Fratello(Riccardo, Giovanni) \land Fratello(Riccardo, Goffredo)$

  $\land\ Giovanni \neq Goffredo$

  $\land\ \forall x\ Fratello(Riccardo, x) \Rightarrow (x = Giovanni) \lor (x = Goffredo)$

- Semantica dei database
  - Ipotesi dei nomi unici: simboli distinti, oggetti distinti
  - Ipotesi del mondo chiuso: tutto ciò di cui non si sa che è vero è falso
  - Chiusura del dominio: esistono solo gli oggetti di cui si parla

Interazione con la KB in FOL

- Asserzioni
  - TELL(KB, *King(John)*)
  - TELL(KB, $\forall$x *King*(x) $\Rightarrow$ *Person*(x))

- Conseguenze logiche
  - ASK(KB, *Person*(*John*))   Sì, se KB |= *Person*(*John*)
  - ASK(KB, $\exists$x *Person*(x))
    - ’Sì' sarebbe riduttivo
    - Lista di sostituzioni o legami: [{*x/John*} {*x/George*} …]

    è una risposta più collaborativa

Inferenza nella logica del prim'ordine

- Riduzione a inferenza proposizionale

- Il *metodo di risoluzione* per FOL
  - Trasformazione in forma a clausole
  - Unificazione

- Casi particolari: sistemi a regole
  - *Backward chaining* e programmazione logica
  - *Forward chaining* e basi di dati deduttive

Regole di inferenza per $\forall$

- **Istanziazione dell'Universale** ($\forall$ eliminazione)

$$\frac{\forall x \ \mathrm{A}[x]}{\mathrm{A}[g]}$$

dove *g* è un termine *ground e* A[*g*] è il risultato della sostituzione di *g* per *x* in A.

- Da: $\forall x \ King(x) \wedge Greedy(x) \Rightarrow Evil(x)$ si possono ottenere
  - $King(John) \wedge Greedy(John) \Rightarrow Evil(John)$
  - $King(Father(John)) \wedge Greedy(Father(John)) \Rightarrow Evil(Father(John))$

Regole per l'esistenziale (∃)

- **Istanziazione dell'esistenziale** (∃ eliminazione)

$$\frac{\exists x\ \mathrm{A}[x]}{\mathrm{A}[k]}$$

1. se ∃ non compare nell'ambito di ∀, *k* è una costante nuova (*costante di Skolem*)
2. altrimenti va introdotta una funzione (di Skolem) nelle variabili quantificate universalmente

$\exists x\ Padre(x, G)$	diventa	$Padre(k, G)$
$\forall x\ \exists y\ Padre(y, x)$	diventa	$\forall x\ Padre(p(x), x)$
	e non	$\forall x\ Padre(k, x)$

... altrimenti tutti avrebbero lo stesso padre !

Riduzione a inferenza proposizionale

- **Proposizionalizzazione**
  - Creare tante istanze delle formule quantificate universalmente quanti sono gli oggetti menzionati
  - Eliminare i quantificatori esistenziali skolemizzando

- A questo punto possiamo trattare la KB come proposizionale e applicare gli algoritmi visti
- Problemi?
  - Le costanti sono in numero <u>finito</u> …
  - …ma se ci sono funzioni, il numero di istanze da creare è <u>infinito</u>: *John, Padre(John), Padre(Padre(John))* …

Teorema di *Herbrand*

- Se KB|= A allora c'è una dimostrazione che coinvolge solo un sotto-insieme finito della KB proposizionalizzata

- Si può procedere incrementalmente ...

1. Creare le istanze con le costanti
2. Creare poi quelle con un solo livello di annidamento
   Padre(John), Madre(John)   %livello 1
3. Poi quelle con due livelli di annidamento
   Padre(Padre(John)), Padre(Madre(John)) … %liv. 2

- Se KB |≠ A il processo non termina.
  E' quindi semidecidibile.

Metodo di risoluzione per il FOL

- Abbiamo visto la regola di risoluzione per PROP: un metodo deduttivo corretto e completo con un'unica regola
- Possiamo estendere al FOL il metodo di risoluzione?
- SI. Ma per arrivare a definire la regola ...
  - Dobbiamo estendere al FOL la trasformazione in forma a clausole
  - Dobbiamo introdurre il concetto di unificazione

Forma a clausole

- Costanti, funzioni, predicati sono come definiti, ma escludiamo nel seguito formule atomiche del tipo ($t_1 = t_2$)

- Una clausola è un insieme di letterali, che rappresenta la loro disgiunzione

  $$\textit{Clausola} \rightarrow \{\textit{Letterale}, \ldots, \textit{Letterale}\}$$
  $$\textit{Letterale} \rightarrow \textit{Formula\_atomica} \mid \neg \textit{Formula\_atomica}$$

- Una KB è un insieme di clausole.

Trasformazione in forma a clausole

- *Teorema*: per ogni formula chiusa α del FOL è possibile trovare in maniera *effettiva* un insieme di clausole $FC(\alpha)$ che è *soddisfacibile* sse α lo era [*insoddisfacibile* sse α lo era]

- Vediamo la trasformazione in dettaglio … per la frase

Tutti coloro che amano tutti gli animali sono amati da qualcuno

$$\forall x\ (\forall y\ Animale(y) \Rightarrow Ama(x,y)) \Rightarrow (\exists y\ Ama(y, x))$$

Trasformazione: passo 1

1. Eliminazione delle implicazioni ($\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$):

$A \Rightarrow B$	diventa	$\neg A \vee B$
$A \Leftrightarrow B$	diventa	$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

$$\forall x\ (\forall y\ Animale(y) \Rightarrow Ama(x,y)) \Rightarrow (\exists y\ Ama(y, x))$$

$$\forall x\ \neg(\forall y\ Animale(y) \Rightarrow Ama(x,y)) \vee (\exists y\ Ama(y, x))$$

$$\forall x\ \neg(\forall y\ \neg Animale(y) \vee Ama(x,y)) \vee (\exists y\ Ama(y, x))$$

Trasformazione: passo 2

2. Negazioni all'interno

$\neg\neg A$ diventa A

$\neg(A \wedge B)$ diventa $\neg A \vee \neg B$ (De Morgan)

$\neg(A \vee B)$ diventa $\neg A \wedge \neg B$ (De Morgan)

$\neg \forall x\, A$ diventa $\exists x\, \neg A$

$\neg \exists x\, A$ diventa $\forall x\, \neg A$

$$\forall x\ \neg(\forall y\ \neg Animale(y) \vee Ama(x,y)) \vee (\exists y\ Ama(y, x))$$

$$\forall x\ (\exists y\ \neg(\neg Animale(y) \vee Ama(x,y))) \vee (\exists y\ Ama(y, x))$$

$$\forall x\ (\exists y\ (Animale(y) \wedge \neg Ama(x,y))) \vee (\exists y\ Ama(y, x))$$

Trasformazione: passo 3

3. Standardizzazione delle variabili: ogni quantificatore una variabile diversa

$$\forall x\ (\exists y\ (Animale(y) \land \neg Ama(x, y))) \lor (\exists y\ Ama(y, x))$$

$$\forall x\ (\exists y\ (Animale(y) \land \neg Ama(x, y))) \lor (\exists z\ Ama(z, x))$$

Trasformazione: passo 4

4. Skolemizzazione: eliminazione dei quantificatori esistenziali

$\forall x\ (\exists y\ (Animale(y) \wedge \neg Ama(x, y))) \vee (\exists z\ Ama(z, x))$

Ci sono due quantificatori esistenziali nell'ambito di uno universale, dobbiamo introdurre due funzioni di Skolem

$\forall x\ (Animale(F(x)) \wedge \neg Ama(x, F(x))) \vee Ama(G(x), x))$

Trasformazione: passo 5

5. Eliminazione quantificatori universali
   - Possiamo portarli tutti davanti (forma *prenessa*)

     $(\forall x\, A) \vee B$ diventa $\forall x\, (A \vee B)$

     $(\forall x\, A) \wedge B$ diventa $\forall x\, (A \wedge B)$

     equivalente se *B* non contiene *x*

   - … e poi eliminarli usando la convenzione che le variabili libere sono quantificate universalmente

$$\forall x\ (Animale(F(x)) \wedge \neg Ama(x, F(x))) \vee Ama(G(x), x))$$

$$(Animale(F(x)) \wedge \neg Ama(x, F(x))) \vee Ama(G(x), x))$$

Trasformazione: passo 6

6. Forma normale congiuntiva (congiunzione di disgiunzioni di letterali):

   $A \vee (B \wedge C)$ diventa $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$$(Animale(F(x)) \wedge \neg Ama(x, F(x))) \vee Ama(G(x), x))$$

$$(Animale(F(x)) \vee Ama(G(x), x)) \wedge (\neg Ama(x, F(x)) \vee Ama(G(x), x))$$

Trasformazione: passo 7

7. Notazione a clausole:

$$(Animale(F(x)) \vee Ama(G(x), x)) \wedge$$
$$(\neg Ama(x, F(x)) \vee Ama(G(x), x))$$

$$\{\text{Animale}(F(x)), \text{Ama}(G(x), x)\}$$
$$\{\neg \text{Ama}(x, F(x)), \text{Ama}(G(x), x)\}$$

Trasformazione: passo 8

8. Separazione delle variabili: clausole diverse, variabili diverse

   Nota: $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x_1\, P(x_1) \wedge \forall x_2\, Q(x_2)$

   $\{Animale(F(x)), Ama(G(x), x)\}$

   $\{\neg Ama(x, F(x)), Ama(G(x), x)\}$

   $\{Animale(F(x_1)), Ama(G(x_1), x_1)\}$

   $\{\neg Ama(x_2, F(x_2)), Ama(G(x_2), x_2)\}$

NOTA: tutti i passi meno la Skolemizzazione preservano l'equivalenza delle formule.

$P(a) \models \exists x\, P(x)$ ma $\exists x\, P(x) \not\models P(a)$

Forma normale implicativa

Forma normale implicativa (forse più intuitiva)

$$\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_k \vee Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$$

$$\neg(P_1 \wedge \ldots \wedge P_k) \vee Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$$

$$P_1 \wedge \ldots \wedge P_k \Rightarrow Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$$

Caso particolare (un solo letterale positivo, clausole di Horn)

$$P_1 \wedge \ldots \wedge P_k \Rightarrow Q$$

Forma a regole come in programmazione logica o nelle basi di dati deduttive

Unificazione: definizione

- *Unificazione*: operazione mediante la quale si determina se due espressioni possono essere rese identiche mediante una sostituzione di termini alle variabili

- Il risultato è la sostituzione che rende le due espressioni identiche, detta *unificatore*, o FAIL, se le espressioni non sono unificabili

Sostituzione

- *Sostituzione*: un insieme finito di associazioni tra variabili e termini, in cui ogni variabile compare una sola volta sulla sinistra.

  Es. $\{x_1/A,\ x_2/f(x_3),\ x_3/B\}$

  Il significato è che A va sostituita a x_1, $f(x_3)$ va sostituito a x_2 …

  Es. $\{x/g(y),\ y/z,\ z/f(x)\}$

- Nota: sulla sinistra solo variabili

Applicazione di sostituzione

Sia σ una sostituzione, A un'espressione:

- $A\sigma$ istanza generata dalla sostituzione (delle variabili con le corrispondenti espressioni)

  Esempi.

  P(x, x, y, v){x/A, y/f(B), z/w} = P(A, A, f(B), v)

  Q(x, y, z) {x/g(y), y/z, z/f(x)} = Q(g(y), z, f(x))

Nota: le variabili vengono sostituite simultaneamente e si esegue un solo passo di sostituzione

Espressioni unificabili

- *Espressioni unificabili*: se esiste una sostituzione che le rende identiche (*unificatore*)

  Es. P(A, y, z) e P(x, B, z) sono unificabili con

  τ={x/A, y/B, z/C}
- τ è un unificatore, poiché P(A, y, z)τ= P(x, B, z)τ=P(A,B,C)
- … ma non l'unico … un altro è

  σ={x/A, y/B}
- σ è *più generale* di τ (istanzia 'meno')

- vorremmo *l'unificatore più generale* di tutti (MGU)
- *Teorema*: l'unificatore più generale è unico, a parte i nomi delle variabili (l'ordine non conta).

Composizione di sostituzioni

- Siano σ e τ due sostituzioni:

  $\sigma = [t_1/x_1, \ldots, t_k/x_k]$ e $\tau = [s_1/y_1, \ldots, s_n/y_n]$

1. $\sigma\tau' = [t_1\tau/x_1, \ldots, t_k\tau/x_k, s_1/y_1, \ldots, s_n/y_n]$
2. Eliminare da $\sigma\tau'$ le identità (Es. x/x) e le coppie s_i/y_i tali che $y_i \in \{x_1, \ldots, x_k\}$, ottenendo così $\sigma\tau$

- Es. $\sigma=[g(x, y)/w, x/y]$ $\tau=[y/x, B/w, C/z]$
  1. $\sigma\tau'=[g(y, y)/w, y/y, y/x, B/w, C/z]$
  2. $\sigma\tau=[g(y, y)/w, y/x, C/z]$

Unificatore più generale

- *L'unificatore più generale* γ (MGU): è tale che ogni altro unificatore può essere ottenuto componendo γ con qualche sostituzione:

  $\forall\sigma\ \exists\delta$ tale che $\gamma\delta = \sigma$

Es. l'MGU di *P(A, y, z)* e *P(x, y, v)* è [A/x, z/v];

un altro unificatore è:

[A/x, B/y, z/v] = [A/x, z/v][B/y]

Algoritmo di unificazione: le regole

1. $f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n) \rightarrow s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n$
2. $f(s_1, \ldots, s_n) = g(t_1, \ldots, t_m) \rightarrow$ *fail* se $f \neq g$ o $n \neq m$
3. $x = x \rightarrow$ *cancella*
4. $t = x \rightarrow x = t$
5. $x = t$, x non occorre in $t \rightarrow$ applica $\{x/t\}$ a tutte le altre equazioni
6. $x = t$, t non è x, x occorre in $t \rightarrow$ *fail* (*occur check*)

Nota: come caso particolare della 2, quando $n=m=0$, si fallisce su due costanti diverse

Algoritmo di unificazione: esempio 1

- Calcolo dell'MGU tra $P(A, y, z)$ e $P(x, B, z)$

Passo 0

$P(A, y, z) = P(x, B, z)$ regola 1

Algoritmo di unificazione: esempio 1

- Calcolo dell'MGU tra *P(A, y, z)* e *P(x, B, z)*

Passo 1

$A = x$ regola 4

$y = B$

$z = z$

1. $f(s_1, \dots, s_n) = f(t_1, \dots, t_n) \rightarrow s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n$
2. $f(s_1, \dots, s_n) = g(t_1, \dots, t_m) \rightarrow$ *fail* se $f \neq g$ o $n \neq m$
3. $x = x \rightarrow$ *cancella*
4. $t = x \rightarrow x = t$
5. $x = t$, x non occorre in $t \rightarrow$ applica $\{x/t\}$ a tutte le altre equazioni
6. $x = t$, t non è x, x occorre in $t \rightarrow$ *fail* (*occur check*)

Algoritmo di unificazione: esempio 1

- Calcolo dell'MGU tra *P(A, y, z)* e *P(x, B, z)*

Passo 2

$x = A$

$y = B$

$z = z$ regola 3

1. $f(s_1, \dots, s_n) = f(t_1, \dots, t_n) \rightarrow s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n$
2. $f(s_1, \dots, s_n) = g(t_1, \dots, t_m) \rightarrow$ *fail* se $f \neq g$ o $n \neq m$
3. $x = x \rightarrow$ *cancella*
4. $t = x \rightarrow x = t$
5. $x = t$, x non occorre in $t \rightarrow$ applica $\{x/t\}$ a tutte le altre equazioni
6. $x = t$, t non è x, x occorre in $t \rightarrow$ *fail* (*occur check*)

Algoritmo di unificazione: esempio 1

- Calcolo dell'MGU tra $P(A, y, z)$ e $P(x, B, z)$

Passo 3

$x = A$

$y = B$

MGU!

1. $f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n) \rightarrow s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n$
2. $f(s_1, \ldots, s_n) = g(t_1, \ldots, t_m) \rightarrow$ *fail* se $f \neq g$ o $n \neq m$
3. $x = x \rightarrow$ *cancella*
4. $t = x \rightarrow x = t$
5. $x = t$, x non occorre in $t \rightarrow$ applica $\{x/t\}$ a tutte le altre equazioni
6. $x = t$, t non è x, x occorre in $t \rightarrow$ *fail* (*occur check*)

Algoritmo di unificazione: esempio 2

- Calcolo dell'MGU tra P(f(x), x) e P(z, z)

Passo 3

z = f(x)

x = f(x) regola 6

FAIL!

(occurr check)

1. $f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n) \rightarrow s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n$
2. $f(s_1, \ldots, s_n) = g(t_1, \ldots, t_m) \rightarrow$ *fail* se $f \neq g$ o $n \neq m$
3. $x = x \rightarrow$ *cancella*
4. $t = x \rightarrow x = t$
5. $x = t$, x non occorre in $t \rightarrow$ applica $\{x/t\}$ a tutte le altre equazioni
6. $x = t$, t non è x, x occorre in $t \rightarrow$ *fail* (*occur check*)

Algoritmo di unificazione: esempio 2

- Calcolo dell'MGU tra P(f(x), x) e P(z, z)

Passo 3

$z = f(x)$

$x = f(x)$ regola 6

FAIL!

(occurr check)

Il metodo di risoluzione per il FOL

- Siamo ora in grado di definire in generale la regola di risoluzione per FOL

$\{\ \ldots\ A\ \ldots\}$ Φ $\qquad\qquad$ $\{\ \ldots\ \neg B\ \ldots\}$ Ψ

γ=MGU(A,B)
unificatore

$((\Phi\ /\ \{A\}) \cup (\Psi\ /\ \{\neg B\}))\ \gamma$ $\qquad$ *risolvente*

/ *differenza di insiemi*

Risoluzione: esempio

$\{P(x, x), Q(x), R(x)\}$ $\qquad$ $\{\neg P(A, z), \neg Q(B)\}$

$\{x/A, z/A\}$ $\qquad$ $\{x/B\}$

$\{Q(A), R(A), \neg Q(B)\}$ $\qquad$ $\{P(B, B), R(B), \neg P(A, z)\}$

Grafo di risoluzione

Problema dei fattori

- Le seguenti clausole dovrebbero produrre la clausola vuota invece …

$\{P(u), P(v)\}$ $\{\neg P(x), \neg P(y)\}$

$\{P(v), \neg P(y)\}$ e qui ci si ferma

- Se un sottoinsieme dei letterali di una clausola può essere unificato allora la clausola ottenuta dopo tale unificazione si dice *fattore* della clausola originaria.
- Il metodo di risoluzione va applicato ai *fattori* delle clausole: $\{P(u)\}$ $\{\neg P(x)\}$

$\{\ \}$

Completezza del metodo di risoluzione

- La deduzione per risoluzione è corretta

  Correttezza: Se $\Gamma \vdash_{RES} A$ allora $\Gamma \models A$

- La deduzione per risoluzione *non* è completa:

  può essere $\Gamma \models A$ e non $\Gamma \vdash_{RES} A$

  - Infatti un semplice controesempio è:
  - $\{\,\} \models \{P(a), \neg P(a)\}$ per cui non vale

    $\{\,\} \vdash_{RES} \{P(a), \neg P(a)\}$

Risoluzione per *refutazione*

- Il *teorema di refutazione* ci suggerisce un metodo alternativo *completo*

- *Teorema di refutazione*:

  $\Gamma \cup \{\neg A\}$ è insoddisfacibile sse $\Gamma \models A$
- *Teorema*: Γ è insoddisfacibile sse $\Gamma \vdash_{RES} \{\,\}$ (la risoluzione è completa rispetto alla refutazione)

Abbiamo un metodo *meccanizzabile*, *corretto* e *completo*: basta aggiungere il negato della formula da dimostrare e provare a generare la clausola vuota

Esempio di refutazione

1. {P(A, J)} — *A è padre di J*
2. {M(B, J)} — *B è madre di J*
3. {¬P(x, y), G(x, y) } — *padre implica genitore*
4. {¬M(v, w), G(v, w)} — *madre implica genitore*

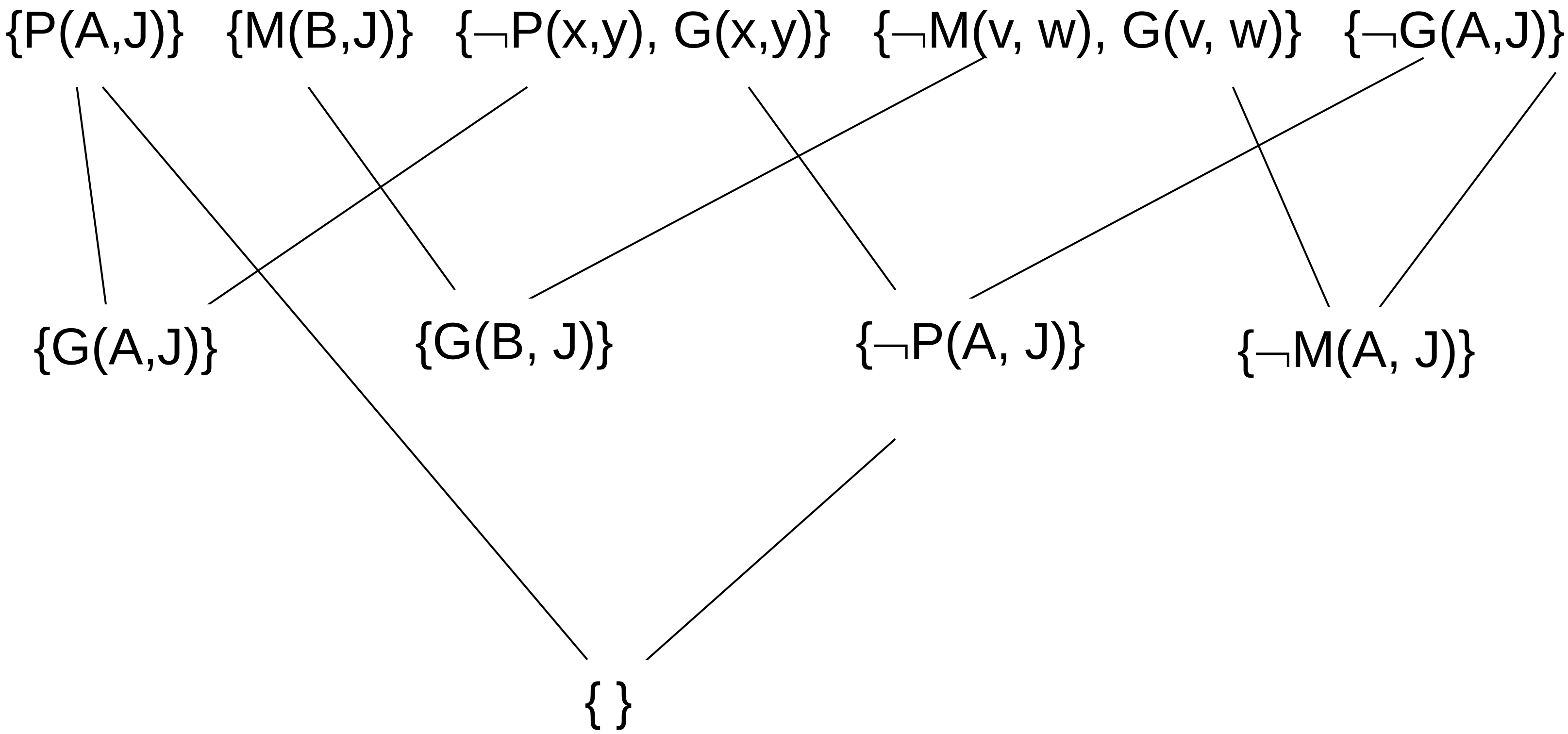
- *Goal*: G(A, J)? — *A è genitore di J?*

KB

- Aggiungiamo a KB la negazione del goal e proviamo a dedurre la clausola vuota

5. { ¬ G(A, J)}

Esempio di refutazione: il grafo



Refutazione per domande di tipo "trova …"

- Esempio: "*Chi sono i genitori di J?*"
- Si cerca di dimostrare che

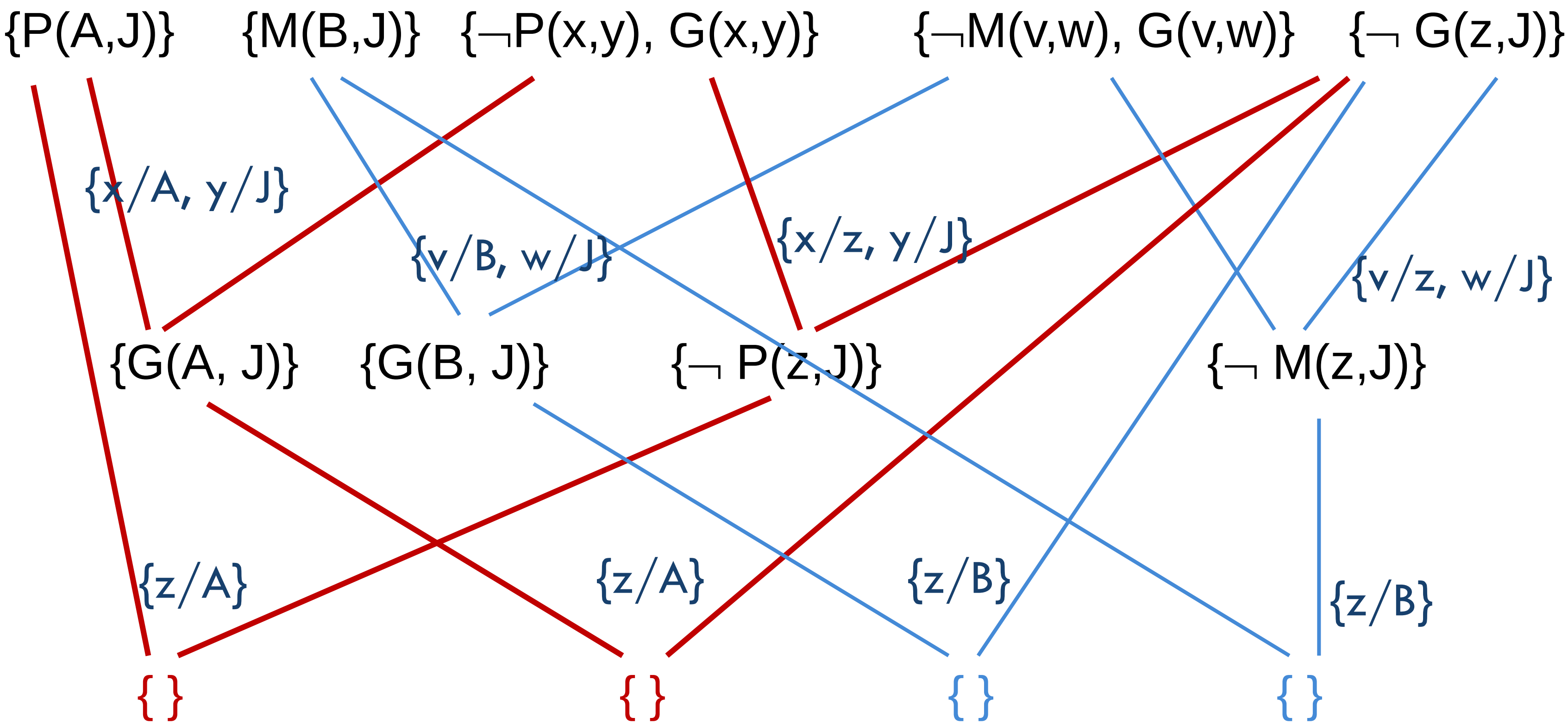
$$\exists z\ G(z, J)$$

- Clausola *goal (negato)*:

$$FC(\neg\exists z\ G(z, J)) \rightarrow \{\ \neg G(z, J)\}$$

- La risposta sono tutti i possibili *legami* per *z* che consentono di ottenere la clausola vuota (risposta calcolata)

Esempio



Le risposte sono: **A**, **B**

Importante ridenominare!

Osserva: è importante la restrizione che ogni clausola usi variabili diverse (anche quelle generate)

$\{\neg P(x, y), G(x, y)\}$ $\qquad$ $\{\neg G(y, J)\}$

$\{x/J, y/J\}$

$\cancel{\{\neg P(J, J)\}}$

… e a questo punto non avremmo potuto ottenere la risposta unificando con P(A, J)

SummarAIzing

- La logica dei predicate esprime in modo più natural le conoscenze degli agenti sul mondo
- La Sintassi e la Semantica dei linguagi logici vengono utilizzati come metodi di formalizzazione del dominio per automatizzare l'uso della conoscenza nella ricerca di soluzioni a problemi contingent
- Nella direzione di automatizzare la verifica di proprietà utili alla ricerca (ad es. minimizzare il costo/pericolo o ottimizzare la utlilità della soluzione) è necessario la applicazione alla dimostrazione della conseguenza logica di metodi algoritmici efficienti per la deduzione
- Le tabelle di verità possono essere applicate come nel caso del CPROP attraverso la proposizionalizzazione delle formule ben formate del CPRED
  - Il teorema di Herbrand ci aiuta
  - Esso è consistente ma non complete
  - Esso ci fornisce però uno strumento completo applicando la prova per refutazione (*risoluzione ground*)

SummarAIzing

- L’alternativa è usare metodi che definiscono in modo più restrittivo i tipi di formule, le standardizzano e che applicano la risoluzione attraverso i meccanismi di unificazione
- E’ la risoluzione applicata ad un s.i. proprio delle formule ben formate che si condurrà alla progammazione logica, dotata di algoritmi efficienti consistenti e completi per la deduzione