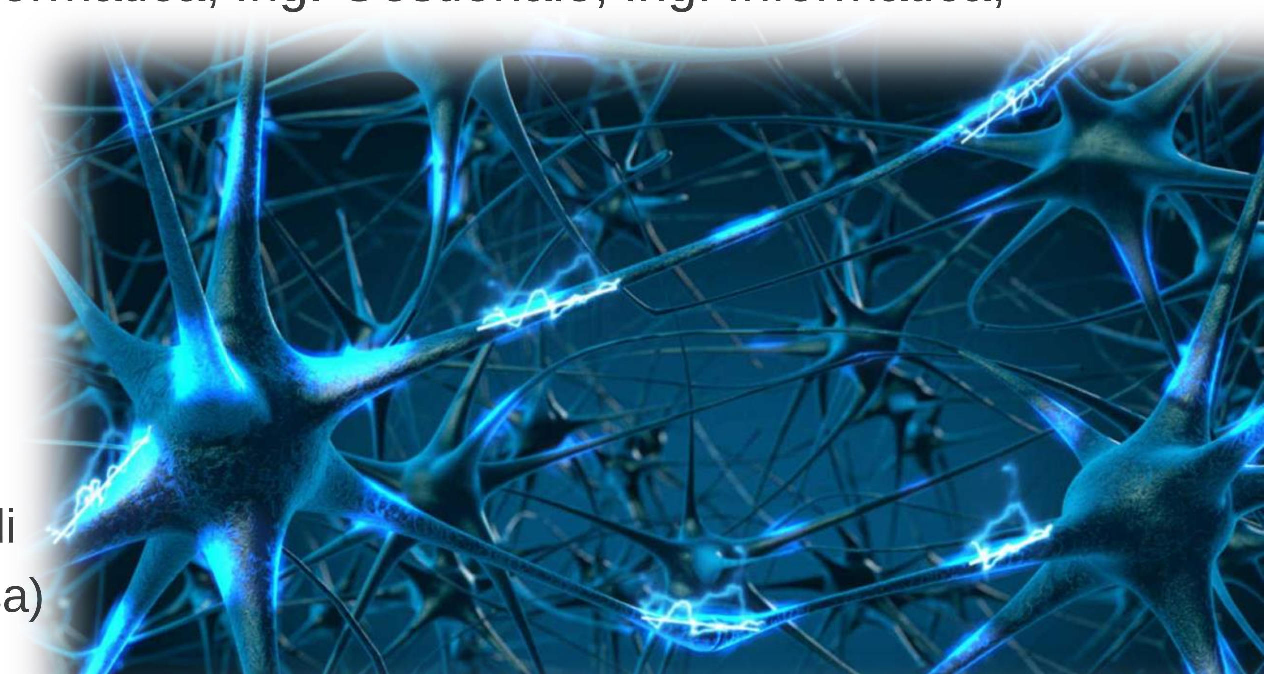
INTELLIGENZA ARTIFICIALE

KR: CALCOLO PROPOSIZIONALE (*)

Corsi di Laurea in Informatica, Ing. Gestionale, Ing. Informatica, Ing. di Internet

(a.a. 2024-2025)

Roberto Basili



(*) alcune *slides* sono di
Maria Simi (Univ. Pisa)

Overview

- La rappresentazione della conoscenza in CPROP
- Sintassi e semantica del CPROP
- Inferenza nel CPROP
  - Algoritmo naive
  - Algoritmi di random walk
  - Deduzione e Inferenza: Risoluzione
- Applicazione del CPROP al mondo del Wumpus

Sintassi

- La sintassi definisce quali sono le frasi legittime del linguaggio:

$$
\begin{aligned}
\mathit{formula} &\rightarrow \mathit{formulaAtomica} \mid \mathit{formulaComplessa} \\
\mathit{formulaAtomica} &\rightarrow \boldsymbol{True} \mid \boldsymbol{False} \mid \mathit{simbolo} \\
\mathit{simbolo} &\rightarrow \boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{Q} \mid \boldsymbol{R} \mid \ldots \\
\mathit{formulaComplessa} &\rightarrow \neg\ \mathit{formula} \\
&\mid\ (\ \mathit{formula}\ \wedge\ \mathit{formula}\ ) \\
&\mid\ (\ \mathit{formula}\ \vee\ \mathit{formula}\ ) \\
&\mid\ (\ \mathit{formula}\ \Rightarrow\ \mathit{formula}\ ) \\
&\mid\ (\ \mathit{formula}\ \Leftrightarrow\ \mathit{formula}\ )
\end{aligned}
$$

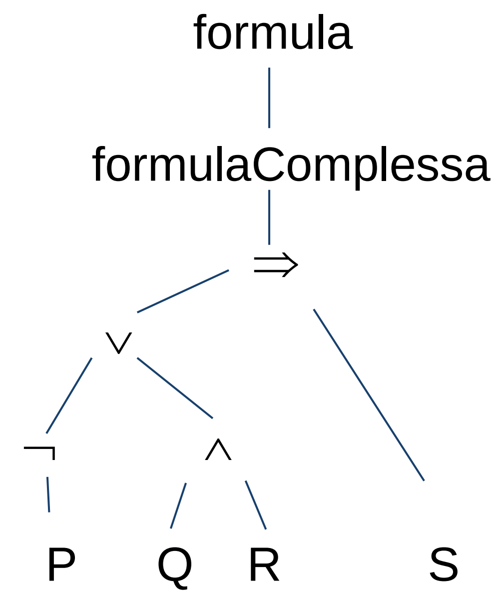
Sintassi: esempi

- $((A \wedge B) \Rightarrow C)$

- Possiamo omettere le parentesi assumendo questa precedenza tra gli operatori:

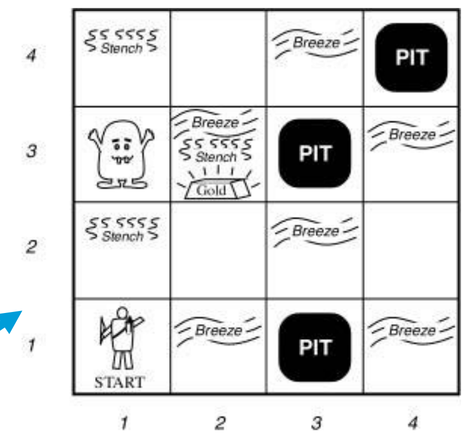
$$\neg \; > \; \wedge \; > \; \vee \; > \; \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

- $\neg P \vee Q \wedge R \Rightarrow S$ è la stessa formula di $(((\neg P) \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow S)$

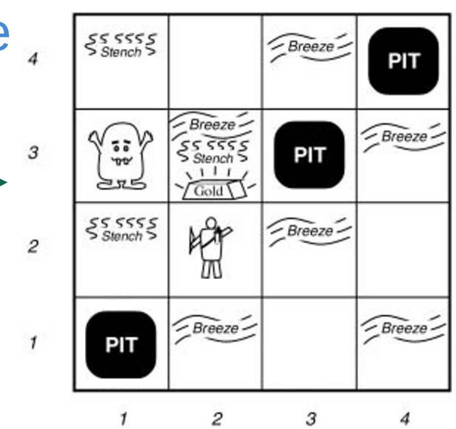


Semantica e mondi possibili (modelli)

- La semantica ha a che fare col significato delle frasi: definisce se un enunciato è vero o falso rispetto ad una *interpretazione* (mondo possibile)
- Una interpretazione definisce un valore di verità per tutti i simboli proposizionali.
- Esempio:
  - {$P_{3,1}$ *vero*, $P_{1,2}$ *falso*, $W_{1,3}$ *vero*}
  - $P_{3,1} \Rightarrow W_{1,3} \vee P_{1,2}$ è vera in questa interpretazione



  - {$P_{3,1}$ *falso*, $P_{1,1}$ *vero*, $W_{1,3}$ *vero*}



- Un *modello* è una interpretazione *che rende vera* una formula o un insieme di formule

Semantica composizionale

- Il significato di una frase è determinato dal significato dei suoi componenti, a partire dalle frasi atomiche (i simboli proposizionali)

  - *True* sempre vero; *False* sempre falso
  - $P \wedge Q$, vero se P e Q sono veri
  - $P \vee Q$, vero se P oppure Q, o entrambi, sono veri
  - $\neg P$, vero se P è falso
  - $P \Rightarrow Q$, vero se P è falso oppure Q è vero
  - $P \Leftrightarrow Q$, vero se entrambi veri o entrambi falsi

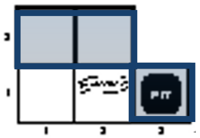
Conseguenza logica

- Una formula A è *conseguenza logica* di un insieme di formule KB se e solo se in ogni modello di KB, anche A è vera (KB $\models$ A)

- Indicando con $M(\alpha)$ l'insieme delle interpretazioni che rendono α vera, cioè i modelli di α, e con $M(\text{KB})$ i modelli di un insieme di formule KB …

$$\text{KB} \models \alpha \quad \text{sse} \quad M(\text{KB}) \subseteq M(\alpha)$$

Esempio dal mondo del Wumpus

- KB = $\{B_{2,1}, \neg B_{1,1}$, + *regole del WW*$\}$  

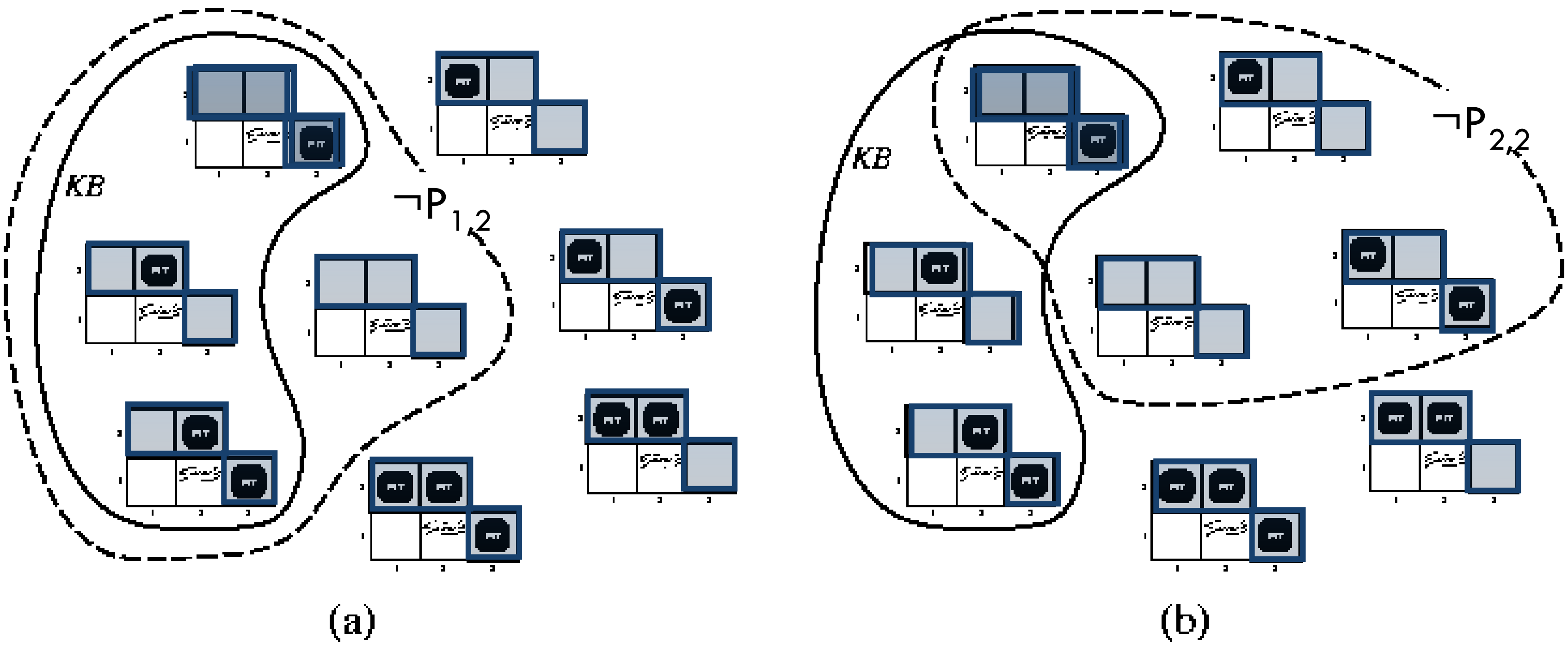
Vogliamo stabilire l'assenza di pozzi in [1,2] e in [2,2] $\quad KB \models \neg P_{1,2}$?

$KB \models \neg P_{2,2}$?

- Ci sono otto possibili interpretazioni o mondi considerando solo l'esistenza di pozzi nelle 3 caselle

$P_{1,2}$, $P_{2,2}$ e $P_{3,1}$

Conseguenza logica e mondi possibili



KB = {$B_{2,1}$, $\neg B_{1,1}$+ *regole del WW*}

KB $\models \neg P_{1,2}$ poiché $M(KB) \subseteq M(\neg P_{1,2})$

KB $\not\models \neg P_{2,2}$ poiché $M(KB) \not\subset M(P_{2,2})$

Equivalenza logica

- Equivalenza logica:

  $A \equiv B$ se e solo se $A \models B$ e $B \models A$

  Esempi:

  $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (commutatività di $\wedge$)

  $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (De Morgan)

  $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (De Morgan)

Equivalenze logiche

Two sentences are logically equivalent iff true in same models:

$\alpha \equiv \beta$ if and only if $\alpha \models \beta$ and $\beta \models \alpha$

Validità, soddisfacibilità

- Una formula A è **valida** *sse* è vera in tutte le interpretazioni (A è anche detta **tautologia**)

- A è **soddisfacibile** *sse* esiste (almeno) una interpretazione in cui A è vera

- A è valida *sse* $\neg$A non è soddisfacibile

  (o A è insoddisfacibile)

INFERENZA PER IL CPROP:
COME VERIFICARE LA SODDISFACIBILITA' DELLE FORMULE

TT-entails: Tabelle di Verità

DPLL: algoritmo di Davis, Putnam

Ricerca Locale: WalkSat

Inferenza per Prop

- *Model checking*
  - una forma di inferenza che sfrutta la definizione di conseguenza logica
    - Si enumerano i possibili modelli
  - Tecnica delle tabelle di verità

- Algoritmi per la *soddisfacibilità*
  - $KB \models A$ sse $(KB_{\wedge} \wedge \neg A)$ è insoddisfacibile

Tabella di verità

- $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad \models \quad (B \vee C)$

A	B	C	$\neg A \vee B$	$A \vee C$	$B \vee C$
T	T	T	T	T	**T**
T	T	F	T	T	**T**
F	T	T	T	T	**T**
F	F	T	T	T	**T**

Tabella di verità

- $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee C) \models (B \vee C)$

Soddisfatto

2^3

A	B	C	$\neg A \vee B$	$A \vee C$	$B \vee C$
T	T	T	T	T	**T**
T	T	F	T	T	**T**
F	T	T	T	T	**T**
F	F	T	T	T	**T**

L'algoritmo TV-Consegue? (TT-entails?)

- Problema: KB $\models \alpha$?

- Enumera tutti le possibili interpretazioni di KB (Se *k* sono i simboli usati da KB, sono 2^k i possibili modelli)

- Per ciascuna interpretazione
  - Se non soddisfa KB, OK
  - Se soddisfa KB, si controlla che soddisfi anche α

TT-Entails?

function TT-ENTAILS?(KB, α) **returns** *true* or *false*
  inputs: KB, the knowledge base, a sentence in propositional logic
    α, the query, a sentence in propositional logic

  $symbols \leftarrow$ a list of the proposition symbols in KB and α
  return TT-CHECK-ALL($KB, \alpha, symbols, \{\,\}$)

---

function TT-CHECK-ALL($KB, \alpha, symbols, model$) **returns** *true* or *false*
  if EMPTY?($symbols$) **then**
    if PL-TRUE?($KB, model$) **then return** PL-TRUE?($\alpha, model$)
    else return *true* // *when KB is false, always return true*
  else do
    $P \leftarrow$ FIRST($symbols$)
    $rest \leftarrow$ REST($symbols$)
    return (TT-CHECK-ALL($KB, \alpha, rest, model \cup \{P = true\}$)
      and
      TT-CHECK-ALL($KB, \alpha, rest, model \cup \{P = false\}$))

Figure 7.10 A truth-table enumeration algorithm for deciding propositional entailment. (TT stands for truth table.) PL-TRUE? returns *true* if a sentence holds within a model. The variable *model* represents a partial model—an assignment to some of the symbols. The keyword "**and**" is used here as a logical operation on its two arguments, returning *true* or *false*.

Esempio di TT-Entails?

KB

Formula alfa

Symbols

Model

$(\neg A \vee B) \wedge (A \vee C) \models (B \vee C)$?

- TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [A, B, C], [ ])
  - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [B, C], [A=t])
    - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [C], [A=t; B=t])
      - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [ ], [A=t; B=t; C=t]) OK
      - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [ ], [A=t; B=t; C=f]) OK
    - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [C], [A=t; B=f])
      - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [ ], [A=t; B=f; C=t]) OK %not a model for KB
      - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [ ], [A=t; B=f; C=f] OK %not a model for KB
  - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [B, C], [A=f])
    - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [C], [A=f; B=t])
      - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [ ], [A=f; B=t; C=t]) OK
      - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [ ], [A=f; B=t; C=f]) OK %not a model for KB
    - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [C], [A=f; B=f])
      - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [ ], [A=f; B=f; C=t]) OK
      - TT-CHECK-ALL($(\neg A\vee B)\wedge(A\vee C)$, $(B\vee C)$, [ ], [A=f; B=f; C=f]) OK %not a model for KB

Algoritmi per la soddisfacibilità (SAT)

- Usano KB in forma a clausole (insiemi di letterali)

$$\{A, B\}\ \{\neg B, C, D\}\ \{\neg A, F\}$$

- Forma normale congiuntiva (CNF): una congiunzione di disgiunzioni di letterali

$$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee D) \wedge (\neg A \vee F)$$

- Non è restrittiva: è sempre possibile ottenerla con trasformazioni che preservano l'equivalenza logica

Trasformazione in forma a clausole

I passi sono:

1. Eliminazione della $\Leftrightarrow$: $(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
2. Eliminazione dell' $\Rightarrow$: $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$
3. Distribuzione delle negazioni all'interno:
   $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ (de Morgan)
   $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
4. Distribuzione delle disgiunzioni $\vee$ su $\wedge$ **(CNF)**:
   $(A \vee (B \wedge C)) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Notazione insemistica: {A,B} {A,C}

Esempio di trasformazione

1. $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$
2. $(B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$
3. $(\neg B_{1,1} \vee (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge (\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \vee B_{1,1})$
4. $(\neg B_{1,1} \vee (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}) \vee B_{1,1})$
5. $(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge (\neg P_{1,2} \vee B_{1,1}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee B_{1,1})$
6. $\{\neg B_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}\}\ \{\neg P_{1,2}, B_{1,1}\}\ \{\neg P_{2,1}, B_{1,1}\}$

L'algoritmo DPLL per la soddisfacibilità

- DPLL(*): Davis, Putman, e poi Lovemann, Loveland
- Parte da una KB in forma a clausole
- È una enumerazione *in profondità* di tutti i possibili modelli, con *tre miglioramenti* rispetto a TT-Entails:
  1. Terminazione anticipata
  2. Euristica dei simboli (o letterali) puri
  3. Euristica delle clausole unitarie

(*) Martin Davis, Logemann, George, and Loveland, Donald, *A Machine Program for Theorem Proving*, in *Communications of the ACM*, vol. 5, n. 7, 1962, pp. 394-397.

DPLL: terminazione anticipata

- Si può decidere sulla verità di una clausola anche con modelli parziali:
- Basta che un letterale sia vero
  - Se A è vero lo sono anche {A, B} e {A, C} indipendentemente dai valori di B e C
  - (a causa della disgiunzione logica, OR)

- Se anche una sola clausola è falsa, allora l'interpretazione complessiva è falsa ed essa non è un modello dell'insieme di clausole

DPLL: simboli puri

- *Simbolo puro*: un simbolo che appare con lo stesso segno in tutte le clausole
  - Es. *{A, ¬B} {¬B, ¬C} {C, A}*   *A* è puro, *B* anche, *C* no
- Nel determinare se un simbolo è puro se ne possono trascurare le occorrenze in clausole già rese vere
- I simboli puri possono essere assegnati a *True* se il letterale è positivo, *False* se negativo.
- Non si eliminano modelli utili: se le clausole hanno un modello continuano ad averlo dopo questo assegnamento.

DPLL: clausole unitarie

- *Clausola unitaria*: una clausola con un solo letterale *non assegnato*
  - Es. {B} è unitaria ma anche …
  - {B, ¬C} è unitaria quando C = *True*

- Conviene assegnare prima valori al letterale in clausole unitarie. L'assegnamento è univoco (*True* se positivo, *False* se negativo).

Lo schema dell'algoritmo DPLL

function DPLL-SATISFIABLE?(s) **returns** *true* or *false*
  inputs: s, a sentence in propositional logic

$clauses \leftarrow$ the set of clauses in the CNF representation of s
$symbols \leftarrow$ a list of the proposition symbols in s
return DPLL($clauses, symbols, \{\,\}$)

---

function DPLL($clauses, symbols, model$) **returns** *true* or *false*

  if every clause in *clauses* is true in *model* **then return** *true*
  if some clause in *clauses* is false in *model* **then return** *false*
  $P, value \leftarrow$ FIND-PURE-SYMBOL($symbols, clauses, model$)
  if P is non-null **then return** DPLL($clauses, symbols - P, model \cup \{P{=}value\}$)
  $P, value \leftarrow$ FIND-UNIT-CLAUSE($clauses, model$)
  if P is non-null **then return** DPLL($clauses, symbols - P, model \cup \{P{=}value\}$)
  $P \leftarrow$ FIRST($symbols$); $rest \leftarrow$ REST($symbols$)
  return DPLL($clauses, rest, model \cup \{P{=}true\}$) **or**
      DPLL($clauses, rest, model \cup \{P{=}false\}$))

Figure 7.17 The DPLL algorithm for checking satisfiability of a sentence in propositional logic. The ideas behind FIND-PURE-SYMBOL and FIND-UNIT-CLAUSE are described in the text; each returns a symbol (or null) and the truth value to assign to that symbol. Like TT-ENTAILS?, DPLL operates over partial models.

DPLL: esempio

KB: $\{\neg B_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}\}$ $\{\neg P_{1,2}, B_{1,1}\}$ $\{\neg P_{2,1}, B_{1,1}\}$ $\{\neg B_{1,1}\}$ $\models$ $\{\neg P_{1,2}\}$?

Aggiungiamo $\{P_{1,2}\}$ e vediamo se insoddisfacibile

SAT($\{\neg B_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}\}$ $\{\neg P_{1,2}, B_{1,1}\}$ $\{\neg P_{2,1}, B_{1,1}\}$ $\{\neg B_{1,1}\}$ $\{P_{1,2}\}$)?

1 2 3 4 5

- La 5 è unitaria; $P_{1,2}$=True; la prima clausola e la 5 sono soddisfatte
- La 2 diventa unitaria; $B_{1,1}$=True; 2 e 3 sono soddisfatte, ma la 4 no; Fail

Non esistono modelli quindi $\neg P_{1,2}$ è conseguenza logica della KB

Metodi ***locali*** per SAT: formulazione

- Gli stati sono gli assegnamenti completi
- L'obiettivo è un assegnamento alle proposizioni di valori di verità che soddisfa **tutte** le clausole
- Si parte da un assegnamento casuale
- Ad ogni passo si cambia il valore di una proposizione (*flip*)
- ***Euristica***: Gli stati sono valutati **contando il numero di clausole soddisfatte** (più sono meglio è) [o non soddisfatte]

Metodi locali per SAT: algoritmi

- Ci sono *molti minimi locali,* per sfuggire ai quali serve introdurre perturbazioni casuali

- *Hill climbing* con riavvio casuale
- *Simulated Annealing*

- Molta sperimentazione per trovare il miglior compromesso tra il grado di avidità e casualità
- WALK-SAT è uno degli algoritmi più semplici ed efficaci

WalkSAT

- WalkSAT ad ogni passo
  - Sceglie a caso una clausola non ancora soddisfatta
  - Sceglie un simbolo da modificare (*flip*) scegliendo con probabilità *p* (di solito 0,5) tra una delle due:
    - Sceglie un simbolo a caso (passo casuale)
    - Sceglie quello che rende più clausole soddisfatte (passo di ottimizzazione, simile a *min-conflicts*)
- Si arrende dopo un certo numero di *flip* predefinito

Conflitti tra variabili

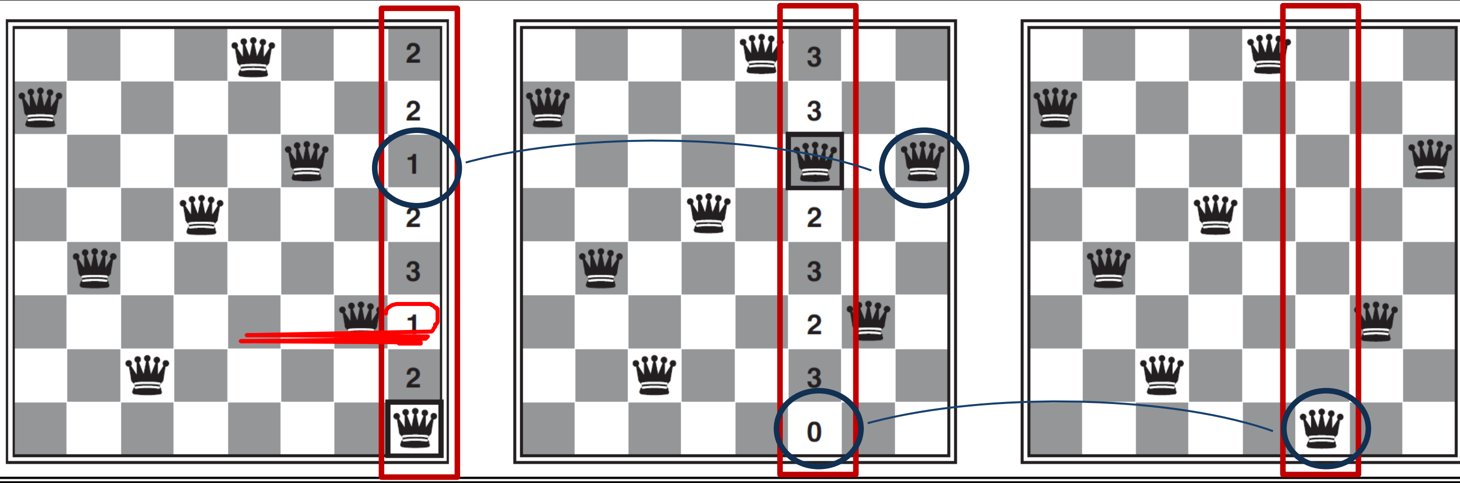


Figure 6.9 A two-step solution using min-conflicts for an 8-queens problem. At each stage, a queen is chosen for reassignment in its column. The number of conflicts (in this case, the number of attacking queens) is shown in each square. The algorithm moves the queen to the min-conflicts square, breaking ties randomly.

WalkSat: l'algoritmo

function WALKSAT(*clauses*, *p*, *max-flips*) **returns** a satisfying model or *failure*
  inputs: *clauses*, a set of clauses in propositional logic
    p, the probability of choosing to do a "random walk" move
    max-flips, number of flips allowed before giving up

  model ← a random assignment of *true*/*false* to the symbols in *clauses*
  for i = 1 **to** *max-flips* **do**
    if *model* satisfies *clauses* **then return** *model*
    clause ← a randomly selected clause from *clauses* that is false in *model*
    with probability *p* flip the value in *model* of a randomly selected symbol
      from *clause*
    else flip whichever symbol in *clause* maximizes the number of satisfied clauses
  return *failure*

WalkSAT: un esempio

$\{\neg B_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}\}$ $\{\neg P_{1,2}, B_{1,1}\}$ $\{\neg P_{2,1}, B_{1,1}\}$ $\{\neg B_{1,1}\}$

1 2 3 4

[$B_{1,1}$=F, $P_{1,2}$=T, $P_{2,1}$=T] 2, 3 F; scelgo 2; a caso:flip $B_{1,1}$

Rosso: passo casuale

Verde: passo di ottimizzazione

Analisi di WalkSAT

- Se *max-flips* = ∞ e l'insieme di clausole è soddisfacibile prima o poi termina
- Va bene per cercare un modello, sapendo che c'è, ma se è insoddisfacibile non termina

- Non può essere usato per verificare l'insoddisfacibilità
- Il problema è decidibile ma l'algoritmo non è completo

Problemi SAT difficili

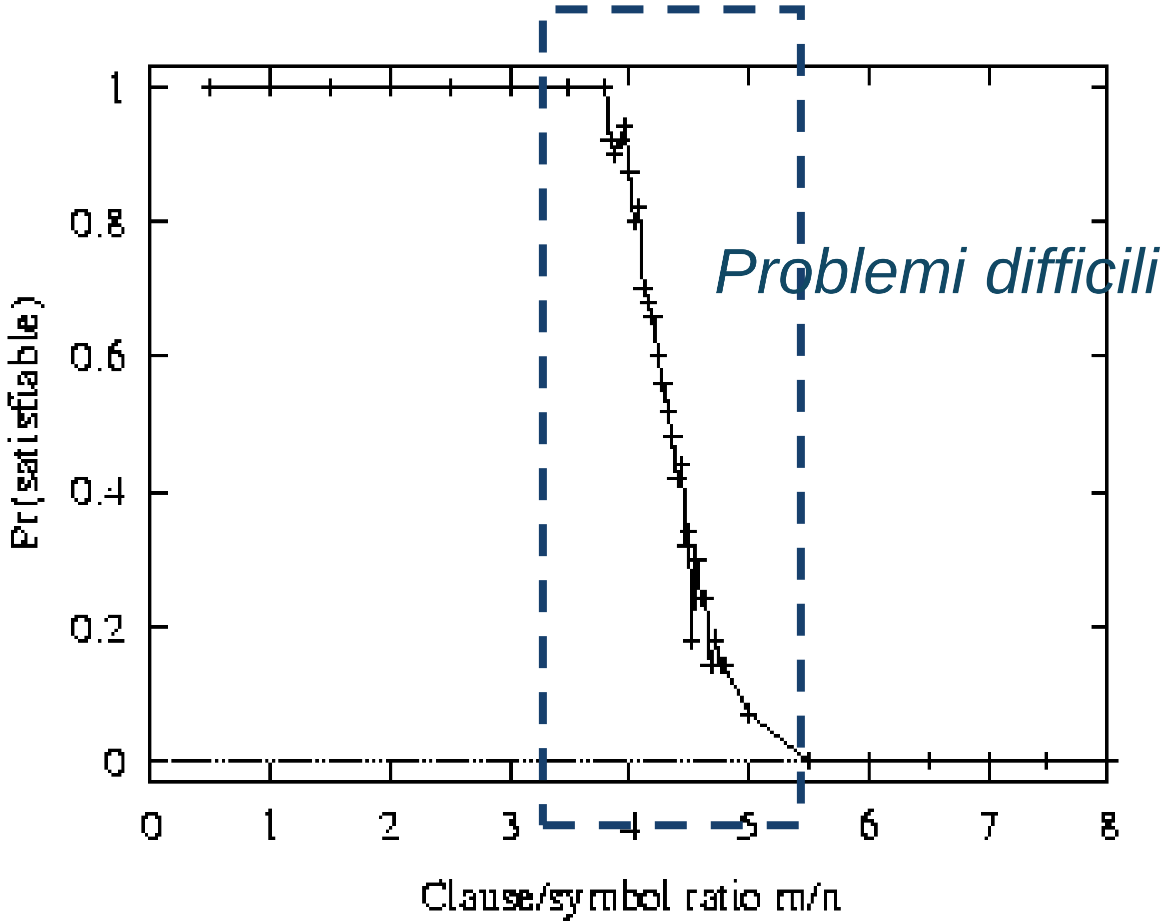
- Se un problema ha molte soluzioni è più probabile che WalkSAT ne trovi una (problema sotto-vincolato)
  - Esempio: 16 soluzioni su 32; un assegnamento ha il 50% di probabilità di essere giusto: 2 passi in media!

$$(\neg D \vee \neg B \vee C) \wedge (B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg B \vee E) \wedge (E \vee \neg D \vee B) \wedge (B \vee E \vee \neg C)$$

  - Quello che conta è il rapporto *m/n* dove *m* è il numero di clausole (vincoli) e *n* il numero di simboli. Es. 5/5=1
  - Più grande il rapporto, più vincolato è il problema

  - Le regine sono facili perché il problema è sotto-vincolato *(poche regine e molte caselle)*

Probabilità di soddisfacibilità in funzione di m/n

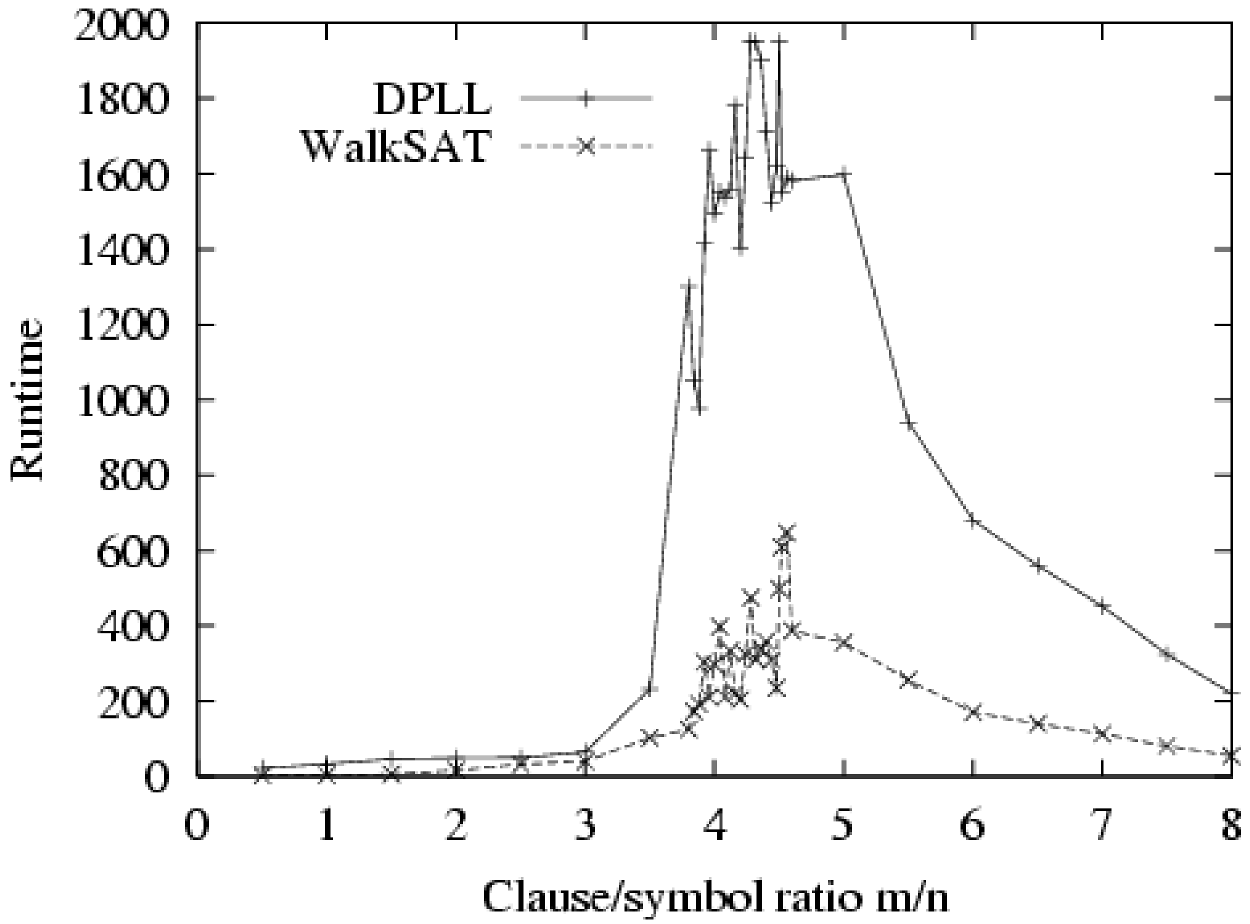


(a)

m (n. clausole) varia
n (n. simboli) = 50
3 letterali per clausola

media su 100 problemi generati a caso

Confronto tra DPLL e WalkSAT



Confronto su problemi soddisfacibili, ma difficili

INFERENZA COME DEDUZIONE

Inferenza come deduzione

- Un altro modo per decidere se KB |= A è *dare delle regole di inferenza*
  - Si scrive KB |– A (A è deducibile da KB)
  - Nota la differenza con:
  - KB |= A (A è conseg. logica da KB)
- Le regole di inferenza
  - dovrebbero derivare SOLO formule che sono conseguenza logica
  - dovrebbero derivare TUTTE le formule che sono conseguenza logica

Correttezza e completezza

- **CORRETTEZZA**: Se KB |− A allora KB |= A

  Tutto ciò che è derivabile è conseguenza logica. Le regole preservano la verità.

- **COMPLETEZZA**: Se KB |= A allora KB |− A

  Tutto ciò che è conseguenza logica è ottenibile tramite il meccanismo di inferenza.

  Non sempre è possibile.

Alcune regole di inferenza per Prop

- Le regole sono schemi deduttivi del tipo:

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \qquad \alpha}{\beta}$$

Modus ponens oppure *Eliminazione dell'implicazione*

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

Eliminazione dell'AND

Eliminazione e introduzione della doppia implicazione

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)} \quad \text{and} \quad \frac{(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)}{\alpha \Leftrightarrow \beta}$$

Meta-teoremi utili

- A **valida** sse ¬A è **insoddisfacibile**

- **Teorema di deduzione**:

  $A \models B$ ***sse*** $(A \Rightarrow B)$ è valida

- **Teorema di refutazione**:

  $A \models B$ ***sse*** $(A \wedge \neg B)$ è insoddisfacibile

  (corrisponde alla dimostrazione per assurdo o per *refutazione*)

Una rappresentazione per il WW

R_1: $\neg P_{1,1}$ *non ci sono pozzi in [1, 1]*

C'è brezza nelle caselle adiacenti ai pozzi*:*

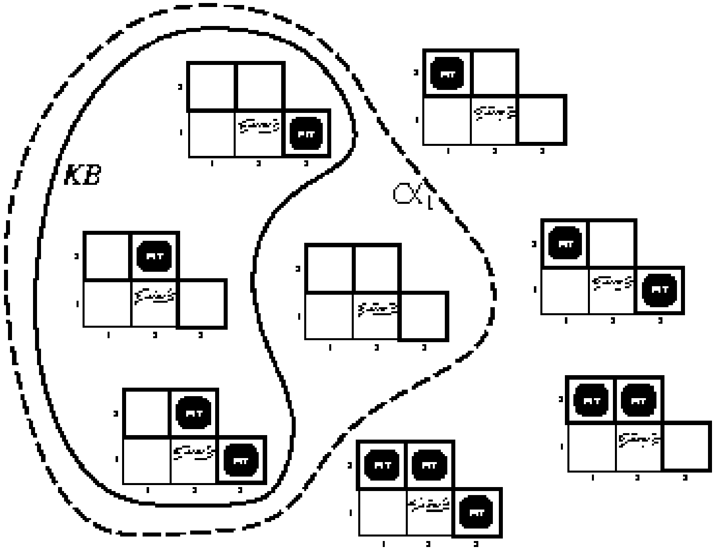
R_2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1})$

Percezioni:

R_4: $\neg B_{1,1}$ *non c'è brezza in [1, 1]*

R_5: $B_{2,1}$ *c'è brezza in [2, 1]*



(a)

$KB = \{R_1\ R_2\ R_3\ R_4\ R_5\}$ $\quad$ $KB \models \neg P_{1,2}$?

Una rappresentazione per il WW

R_1: $\neg P_{1,1}$ *non ci sono pozzi in [1, 1]*

C'è brezza nelle caselle adiacenti ai pozzi*:*

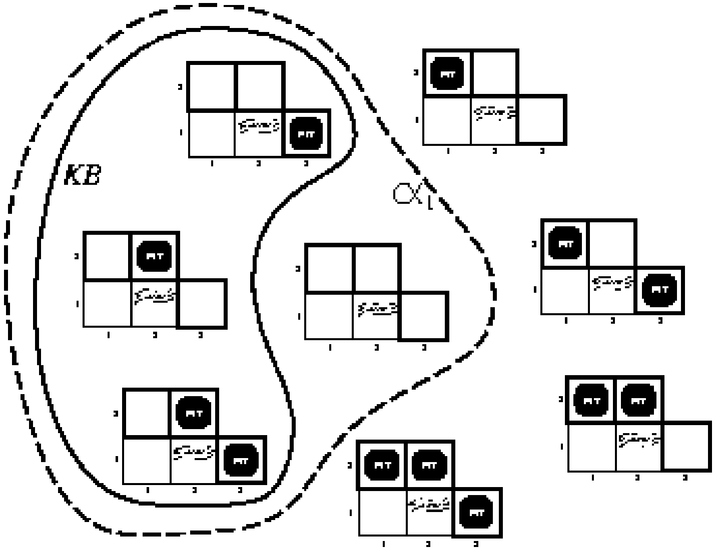
R_2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1})$

Percezioni:

R_4: $\neg B_{1,1}$ *non c'è brezza in [1, 1]*

R_5: $B_{2,1}$ *c'è brezza in [2, 1]*



(a)

$KB = \{R_1\ R_2\ R_3\ R_4\ R_5\}$ KB $\models \neg P_{1,2}$?

Dimostrazione

$\boxed{KB \models \neg P_{1,2} \ ?}$

KB:

R_1: $\neg P_{1,1}$ *non ci sono pozzi in [1, 1]*

Brezza

R_2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1})$

Percezioni:

R_4: $\neg B_{1,1}$ *non c'è brezza in [1, 1]*

R_5: $B_{2,1}$ *c'è brezza in [2, 1]*

R_6: $(B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$ *(R_2, $\Leftrightarrow$E)*

R_7: $(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}$ *(R_6, $\wedge$E)*

R_8: $\neg B_{1,1} \Rightarrow \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1})$ *(R_7, contrapposizione)*

R_9: $\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1})$ *(R_4 e R_8, Modus Ponens)*

R_{10} : $\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$ *(R_9, De Morgan)*

R_{11} : $\neg P_{1,2}$ *(R_{10}, $\wedge$E)*

Dimostrazione come ricerca

- *Problema*: come decidere ad ogni passo **qual'è la regola di inferenza da applicare**? … e a quali **premesse**? Come evitare l'esplosione combinatoria?
- È un problema di **esplorazione di uno spazio di stati**
- Una *procedura di dimostrazione* definisce:
  - la direzione della ricerca
  - la strategia di ricerca

Direzione della ricerca

- Nella dimostrazione di teoremi conviene procedere all'indietro.
- Infatti, con una lettura *in avanti* delle regole:

Da A, B: $A \wedge B > A \wedge (A \wedge B) > \ldots > A \wedge (A \wedge (A \wedge B)) \ldots$

- Meglio *all'indietro*
  - se si vuole dimostrare $A \wedge B$, si cerchi di dimostrare A e poi B
  - se si vuole dimostrare $A \Rightarrow B$, si assuma A e si cerchi di dimostrare B
  - …

Strategia di ricerca

- Completezza
  - Le regole della deduzione naturale sono un insieme di regole di inferenza completo (2 per ogni connettivo)
    - Introduzione (ad es. A, B |- $A \wedge B$)
    - Eliminazione (ad es. $A \wedge B$ |- A, e pure $A \wedge B$ |- B)
  - Se l'algoritmo di ricerca è completo siamo a posto

- Efficienza
  - La complessità è alta:
    - è un problema decidibile ma NP-completo

INFERENZA ATTRAVERSO LA RISOLUZIONE

Regola di risoluzione per PROP

- E se avessimo un'*unica* regola di inferenza (*senza rinunciare alla completezza*)?
- **Regola di risoluzione** (presuppone forma a clausole)

$$\{P, Q\} \quad \{\neg P, R\} \;\Rightarrow\; \{Q, R\}$$

$$\frac{P \lor Q, \; \neg P \lor R}{Q \lor R}$$

- Corretta? SI: basta pensare ai modelli
- Preferita la notazione insiemistica delle clausole
- NOTA: gli eventuali duplicati si eliminano

La regola di risoluzione in generale

$$\frac{\{l_1, l_2, \ldots \mathbf{l_i}, \ldots l_k\} \quad \{m_1, m_2, \ldots \mathbf{m_j}, \ldots m_n\}}{\{l_1, l_2, \ldots l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots l_k\, m_1\, m_2, \ldots m_{j-1}, m_{j+1}, \ldots m_n\}}$$

Gli l e m sono letterali, simboli di proposizione positivi o negativi; l_i *e* m_j *sono uguali e di segno opposto*

Caso particolare:

$$\frac{\{P\} \quad \{\neg P\}}{\{\,\}}$$ *clausola vuota*

Il grafo di risoluzione

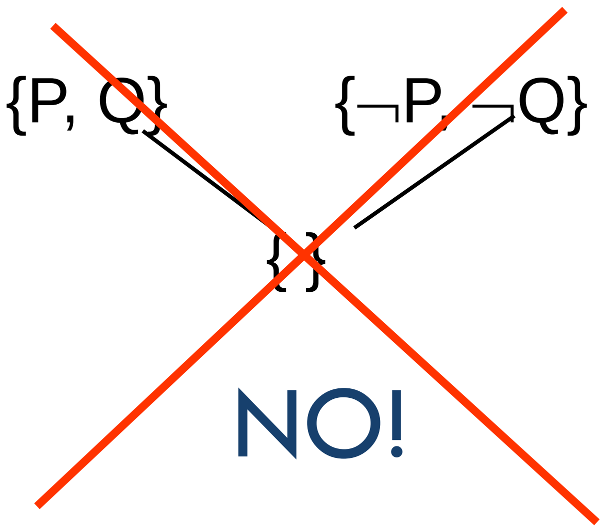
$\{\neg B_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}\}$ $\{\neg P_{1,2}, B_{1,1}\}$ $\{\neg P_{2,1}, B_{1,1}\}$ $\{\neg B_{1,1}\}$

$\{P_{1,2}, P_{2,1}, \neg P_{1,2}\}$ $\{\neg B_{1,1}, P_{2,1}, B_{1,1}\}$ $\{\neg B_{1,1}, P_{1,2}, B_{1,1}\}$ $\{\neg P_{1,2}\}$ $\{\neg P_{2,1}\}$

Goal

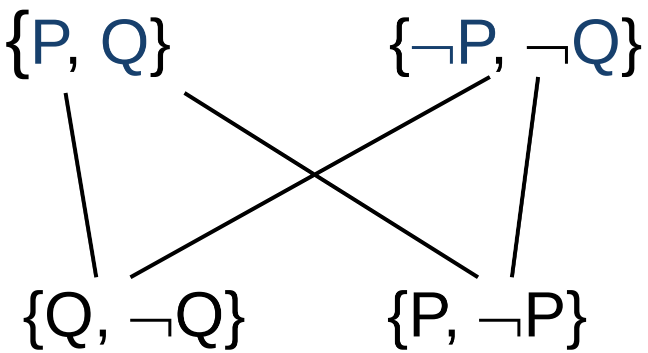
Tautologie

Attenzione!



Non è contraddittorio:

Es. Bianco o nero e
non bianco o non nero



… e qui ci fermiamo

Un passo alla volta !!!

Ma siamo sicuri che basti una regola?

- Completezza: se KB $\models \alpha$ allora KB $\vdash_{res} \alpha$? **Non sempre**:
  Es. KB $\models$ {A, ¬A} ma non è vero che KB $\vdash_{res}$ {A, ¬A}
- Teorema di risoluzione [*ground*]:
  Se KB insoddisfacibile allora KB $\vdash_{res}$ { } ***completezza***
- Teorema di refutazione offre un modo alternativo:
  KB $\models$ α sse (KB $\cup$ {$\neg\alpha$}) è insoddisfacibile
- Nell'esempio:
  KB $\cup$ *FC*(*)(¬(A ∨¬A)) è insoddisfacibile? Sì, perché …
  KB $\cup$ {A} $\cup$ {¬A} $\vdash$ { } in un passo e la regola di risoluzione è corretta
  Quindi KB $\models$ {A, ¬A}

(*) FC = Forma Clausale

Refutazione

Goal negato

$\{\neg B_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}\}$ $\{\neg P_{1,2}, B_{1,1}\}$ $\{\neg P_{2,1}, B_{1,1}\}$ $\{\neg B_{1,1}\}$ $\{P_{1,2}\}$

$\{B_{1,1}\}$

$\{\ \}$ *Clausola vuota*

Il teorema di risoluzione *ground*

- Sia RC(*S*) l'insieme (*chiusura per risoluzione*) ottenuto applicando in tutti i modi possibili la regola di risoluzione ad *S.*
- RC(*S*) è finito
- Teorema di risoluzione *ground*:

  Se *S* è insoddisfacibile allora RC(*S*) contiene *{ }.*
- Infatti:
- Se RC(*S*) non contenesse { } potremmo costruire un modello di *S*
- Come? Sia P_1, P_2 … P_k un ordinamento delle proposizioni. Assegniamo valori procedendo con i=1,…k in questo modo:
  - Se in una clausola c'è ¬P_i e gli altri letterali sono falsi in base agli assegnamenti già fatti, assegna *False* a P_i, altrimenti assegna *True* a P_i
  - Se fosse {false, false …, false, ¬P_i} e {false, false …, false, P_i}, allora la clausola vuota { } sarebbe in RC(S)

APPLICAZIONE DELLA INFERENZA A PROBLEMI DI RICERCA

Planning nel mondo del Wumpus come deduzione logica della sequenza di azioni ottime

Il Wumpus World con Prop: regole

- Regole generali: "*C'è brezza nelle caselle adiacenti ai pozzi*"

  $B_{x,y} \Leftrightarrow P_{x,y+1} \vee P_{x,y-1} \vee P_{x+1,y} \vee P_{x-1,y}$ per ogni *x* e *y*

  16 asserzioni di questo tipo in un mondo 4 X 4

- C'è esattamente un Wumpus!
  - $W_{1,1} \vee W_{1,2} \vee W_{1,3} \vee \ldots W_{4,4}$ *%almeno uno*
  - $\neg W_{i,j} \vee \neg W_{k,m}$ per ogni coppia di caselle *%esattam. uno*

  16X15/2 = 120 asserzioni per dire che ce n'è al più uno!!!

Wumpus World: locazione, orientamento

- Se si vuole tenere traccia della locazione
  - $L_{1,1} \wedge FacingRight \wedge Forward \Rightarrow L_{2,1}$

  Ma … non va bene ($L_{2,1} \wedge L_{1,1}$ è inconsistente!)
  serve una dimensione temporale
  - $L^1_{1,1} \wedge FacingRight^1 \wedge Forward^1 \Rightarrow L^2_{2,1}$

- Stessa cosa per l'orientamento …
  - $FacingRight^1 \wedge TurnLeft^1 \Rightarrow FacingUp^2$

La rappresentazione del tempo

- Fluenti (Fatti che variano nel tempo)

$$\begin{aligned} L_{x,y}^t &\Rightarrow (Breeze^t \Leftrightarrow B_{x,y}) \\ L_{x,y}^t &\Rightarrow (Stench^t \Leftrightarrow S_{x,y}) \ . \end{aligned}$$

$$L_{1,1}^0 \wedge FacingEast^0 \wedge Forward^0 \Rightarrow (L_{2,1}^1 \wedge \neg L_{1,1}^1) \ .$$

- Assiomi di stato

$$F^{t+1} \Leftrightarrow ActionCausesF^t \vee (F^t \wedge \neg ActionCausesNotF^t) \ .$$

  - Es. $HaveArrow^{t+1} \Leftrightarrow (HaveArrow^t \wedge \neg Shoot^t) \ .$

$$\begin{aligned} L_{1,1}^{t+1} \Leftrightarrow \ & (L_{1,1}^t \wedge (\neg Forward^t \vee Bump^{t+1})) \\ \vee \ & (L_{1,2}^t \wedge (South^t \wedge Forward^t)) \\ \vee \ & (L_{2,1}^t \wedge (West^t \wedge Forward^t)) \ . \end{aligned}$$

Il Wumpus World con Prop

- Una casella [i, j] è sicura se KB $\models$ $(\neg P_{i,j} \wedge \neg W_{i,j})$

- Una casella [i, j] potrebbe essere considerata sicura se $KB \cup \{P_{i,j}, W_{i,j}\}$ è insoddisfacibile

- Con tutti questi simboli di proposizione
  - n fluenti => 2^n stati fisici al tempo t quindi 2^{2^n} credenze possibili
  - servono procedure di inferenza efficienti (TTEntails e DPLL non sono praticabili)
  - serve un linguaggio più espressivo!!

Planning as search in Wumpus

function HYBRID-WUMPUS-AGENT($percept$) **returns** an $action$
  inputs: $percept$, a list, [$stench$,$breeze$,$glitter$,$bump$,$scream$]
  persistent: KB, a knowledge base, initially the atemporal "wumpus physics"
    t, a counter, initially 0, indicating time
    $plan$, an action sequence, initially empty

  TELL(KB, MAKE-PERCEPT-SENTENCE($percept, t$))
  TELL the KB the temporal "physics" sentences for time t
  $safe \leftarrow \{[x,y] \;:\; \text{ASK}(KB, OK^t_{x,y}) = true\}$
  if ASK(KB, $Glitter^t$) $= true$ **then**
    $plan \leftarrow [Grab]$ + PLAN-ROUTE($current$, {[1,1]}, $safe$) + [$Climb$]
  if $plan$ is empty **then**
    $unvisited \leftarrow \{[x,y] \;:\; \text{ASK}(KB, L^{t'}_{x,y}) = false \text{ for all } t' \leq t\}$
    $plan \leftarrow$ PLAN-ROUTE($current$, $unvisited \cap safe$, $safe$)
  if $plan$ is empty and ASK(KB, $HaveArrow^t$) $= true$ **then**
    $possible\_wumpus \leftarrow \{[x,y] \;:\; \text{ASK}(KB, \neg W_{x,y}) = false\}$
    $plan \leftarrow$ PLAN-SHOT($current$, $possible\_wumpus$, $safe$)
  if $plan$ is empty **then** // no choice but to take a risk
    $not\_unsafe \leftarrow \{[x,y] \;:\; \text{ASK}(KB, \neg OK^t_{x,y}) = false\}$
    $plan \leftarrow$ PLAN-ROUTE($current$, $unvisited \cap not\_unsafe$, $safe$)
  if $plan$ is empty **then**
    $plan \leftarrow$ PLAN-ROUTE($current$, {[1,1]}, $safe$) + [$Climb$]
  $action \leftarrow$ POP($plan$)
  TELL(KB, MAKE-ACTION-SENTENCE($action, t$))
  $t \leftarrow t + 1$
  return $action$

---

function PLAN-ROUTE($current$,$goals$,$allowed$) **returns** an action sequence
  inputs: $current$, the agent's current position

function HYBRID-WUMPUS-AGENT($percept$) **returns** an $action$
  inputs: $percept$, a list, [$stench$,$breeze$,$glitter$,$bump$,$scream$]
  persistent: KB, a knowledge base, initially the atemporal "wumpus physics"
    t, a counter, initially 0, indicating time
    $plan$, an action sequence, initially empty

  TELL(KB, MAKE-PERCEPT-SENTENCE($percept$, t))
  TELL the KB the temporal "physics" sentences for time t
  $safe \leftarrow \{[x, y] : \text{ASK}(KB, OK^t_{x,y}) = true\}$
  if ASK(KB, $Glitter^t$) $= true$ **then**
    $plan \leftarrow [Grab]$ + PLAN-ROUTE($current$, $\{[1,1]\}$, $safe$) + $[Climb]$
  if $plan$ is empty **then**
    $unvisited \leftarrow \{[x, y] : \text{ASK}(KB, L^{t'}_{x,y}) = false$ for all $t' \leq t\}$
    $plan \leftarrow$ PLAN-ROUTE($current$, $unvisited \cap safe$, $safe$)
  if $plan$ is empty and ASK(KB, $HaveArrow^t$) $= true$ **then**
    $possible\_wumpus \leftarrow \{[x, y] : \text{ASK}(KB, \neg W_{x,y}) = false\}$
    $plan \leftarrow$ PLAN-SHOT($current$, $possible\_wumpus$, $safe$)
  if $plan$ is empty **then** // no choice but to take a risk
    $not\_unsafe \leftarrow \{[x, y] : \text{ASK}(KB, \neg OK^t_{x,y}) = false\}$
    $plan \leftarrow$ PLAN-ROUTE($current$, $unvisited \cap not\_unsafe$, $safe$)
  if $plan$ is empty **then**
    $plan \leftarrow$ PLAN-ROUTE($current$, $\{[1, 1]\}$, $safe$) + $[Climb]$
  $action \leftarrow$ POP($plan$)
  TELL(KB, MAKE-ACTION-SENTENCE($action$, t))
  $t \leftarrow t + 1$
  return $action$

```
    plan ← [Grab] + PLAN-ROUTE(current, {[1,1]}, safe) + [Climb]
  if plan is empty then
    unvisited ← {[x, y] : ASK(KB, L^{t'}_{x,y}) = false for all t' ≤ t}
    plan ← PLAN-ROUTE(current, unvisited ∩ safe, safe)
  if plan is empty and ASK(KB, HaveArrow^t) = true then
    possible_wumpus ← {[x, y] : ASK(KB, ¬ W_{x,y}) = false}
    plan ← PLAN-SHOT(current, possible_wumpus, safe)
  if plan is empty then   // no choice but to take a risk
    not_unsafe ← {[x, y] : ASK(KB, ¬ OK^t_{x,y}) = false}
    plan ← PLAN-ROUTE(current, unvisited ∩ not_unsafe, safe)
  if plan is empty then
    plan ← PLAN-ROUTE(current, {[1, 1]}, safe) + [Climb]
  action ← POP(plan)
  TELL(KB, MAKE-ACTION-SENTENCE(action, t))
  t ← t + 1
  return action
```

```
function PLAN-ROUTE(current,goals,allowed) returns an action sequence
  inputs: current, the agent's current position
          goals, a set of squares; try to plan a route to one of them
          allowed, a set of squares that can form part of the route

  problem ← ROUTE-PROBLEM(current, goals,allowed)
  return A*-GRAPH-SEARCH(problem)
```

Figure 7.20 A hybrid agent program for the wumpus world. It uses a propositional knowledge base to infer the state of the world, and a combination of problem-solving search and domain-specific code to decide what actions to take.

Come usare il PROP per pianificare

- Creare una formula che descriva
  - Stato iniziale
  - Possibil continuazioni
  - Il Goal
- Fornire la formula ad un SAT solver
- SE la soluzione esiste allora il modello di essa contiene
  - Assegnazioni di valori di verità alle azioni che in ordine costituiscono il piano
  - Oppure la soluzione ed il piano sono impossibili

Un algoritmo per il SATplan

function SATPLAN($init$, $transition$, $goal$, $T_{\max}$) **returns** solution or failure
  inputs: $init$, $transition$, $goal$, constitute a description of the problem
    $T_{\max}$, an upper limit for plan length

  for t = 0 **to** $T_{\max}$ **do**
    $cnf \leftarrow$ TRANSLATE-TO-SAT($init$, $transition$, $goal$, t)
    $model \leftarrow$ SAT-SOLVER(cnf)
    if $model$ is not null **then**
      return EXTRACT-SOLUTION($model$)
  return $failure$

Figure 7.22 The SATPLAN algorithm. The planning problem is translated into a CNF sentence in which the goal is asserted to hold at a fixed time step t and axioms are included for each time step up to t. If the satisfiability algorithm finds a model, then a plan is extracted by looking at those proposition symbols that refer to actions and are assigned $true$ in the model. If no model exists, then the process is repeated with the goal moved one step later.

SummarAIzing

- Sintassi e semantica del Calcolo proposizionale
- Una rappresentazione proposizionale del mondo
  - Esempio: il mondo del Wumpus
- Conseguenza Logica e Inferenza nel PROP
- Algoritmi per la soddisfacibilità delle formule
  - Enumerazione delle tabelle di verità (TTEntails)
  - L'algoritmo di Davis Putnam
  - Il WalkSat
- Dimostrazione automatica:
  - Deduzione Naturale e backward chaining
  - La risoluzione
- Il mondo di Wumpus e l'uso della risoluzione